ÜBER GEWISSE INTEGRALGLEICHUNGEN ERSTER ART,

BESONDERS AUS DEM GEBIETE DER POTENTIALTHEORIE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT MARBURG

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

VORGELEGT VON

GEORG WIARDA
AUS ELBERFELD.

MARBURG 1915.

DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIV.-BUCHDRUCKEREI IN GÖTTINGEN
(W. FR. KAESTNER).

Von der Philosophischen Fakultät als Dissertation angenommen
am 11. Dezember 1913.

Referent: Professor Dr. E. R. Neumann.

Herrn Prof. Dr. E. R. Neumann

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556035_0100

§ 1. Einleitung.

Bei den folgenden Untersuchungen handelt es sich zunächst um gewisse Darstellungen der stetigen Greenschen Funktion beim Kreise und bei der Ellipse. Dabei ist allgemein unter der „stetigen Greenschen Funktion $G_j^{(i)}$" eines ebenen Gebietes, wie sie zum Pole i gehört, die Funktion verstanden, welche selbst nebst ihren ersten Ableitungen im ganzen Innern stetig ist, daselbst überall der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügt und in Randpunkten s allenthalben den Wert $\log \frac{1}{E_{is}}$ hat[1]). Eine ähnliche Definition gilt für die stetige Greensche Funktion des Außengebietes. Die von Green selbst eingeführte (unstetige) Funktion ist dann

$$\mathfrak{G}_j^{(i)} = \log \frac{1}{E_{ij}} - G_j^{(i)}.$$

Beim Kreise ist es ein bekanntes Resultat, daß man die stetige Greensche Funktion (bis auf eine additive Konstante) ersetzen kann durch das Potential des zu dem Pole nach dem Gesetz der reziproken Radien konjugierten Punktes, in diesem die Masse Eins konzentriert gedacht. Ein analoges Resultat, wenigstens für die Greensche Funktion des Innengebietes, hat E. R. Neumann bei der Ellipse angegeben[2]). Danach läßt sich im ganzen Innengebiet die zum Pole i gehörige stetige Greensche Funktion darstellen als Potential eines gewissen Systems äußerer Punkte, wobei wieder noch additive Konstanten hinzutreten.

Andererseits können wir die Greensche Funktion darstellen

---

1) E_{is} bedeutet hier, wie stets im Folgenden, die Entfernung der beiden Punkte i und s.

2) Vgl. E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Leipzig bei Teubner 1912 S. 125–141.

als Potential der Peripherie der gegebenen Ellipse, welche wir auch im Folgenden stets die „Grundellipse“ nennen wollen, wenn wir diese in geeigneter Weise mit Masse belegen (Greensche Belegung). Um von dieser Darstellungsweise zu der durch die Summe der eben erwähnten Punktpotentiale zu kommen, hat C. Neumann folgenden Gedankengang mitgeteilt[1]), welcher den Hauptausgangspunkt für die folgende Arbeit bildet: Man betrachtet etwas größere konfokale Ellipsen und sucht sie so mit Masse zu belegen, daß ihr Potential im Innern der Grundellipse übereinstimmt mit der Greenschen Funktion $G^{(\phi)}$, oder, was dasselbe ist, so, daß das Potential dieser größeren Ellipse in allen Randpunkten s der Grundellipse den Wert $\log\frac{1}{E}$ annimmt. Die spätere Untersuchung wird lehren, daß eine derartige Belegung möglich ist für alle Ellipsen, welche zwischen der Grundellipse und dem ersten jener E. R. Neumannschen Ersatzpunkte liegen. Je näher die größeren Ellipsen an diesen letzteren herankommen, um so mehr verdichtet sich die Belegung an einer Stelle, ihre Dichtigkeit wächst schließlich dort über alle Grenzen; es entsteht ein Massenpunkt, eben der erste Punkt jenes Systemes. Das Verfahren vermittelt also einen stetigen Übergang zwischen den beiden verschiedenen Darstellungsweisen der Greenschen Funktion.

Die Durchführung dieses Gedankenganges beim einfachen Fall des Kreises und dem komplizierteren der Ellipse führt uns auf einen anderen Typus von Integralgleichungen erster Art. Eine Integralgleichung erster Art hat die Gestalt

$$(1) \qquad f(s) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \quad (a \leqq s \leqq b),$$

wo $K(s,t)$ und $f(s)$ gegebene Funktionen sind, während es $\eta(t)$ zu bestimmen gilt. $K(s,t)$, welches wir stets als symmetrisch annehmen, heißt der „Kern“ der Gleichung. $f(s)$ wollen wir die „freie Funktion“ nennen. Über $f(s)$ und $K(s,t)$ machen wir außerdem noch die Voraussetzung der Stetigkeit. Von der Lösung $\eta(t)$ verlangen wir, daß sie eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion sein soll.

Es handelt sich also bei diesen Gleichungen um die Darstellbarkeit einer gegebenen Funktion $f(s)$ als „Kernintegral“, wie wir ein Integral von der Form

---

1) Mündliche Mitteilung an E. R. Neumann.

$$\int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

bezeichnen wollen. Eine solche Darstellung ist aber bekanntlich im allgemeinen nicht möglich.

Bei Integralgleichungen zweiter Art

$$f(s) = \eta(s) - k\int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

genügt es, sich auf das Studium der „Kernintegralgleichung“

$$K(s,r) = \eta(s) - k\int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \quad (a \leqq r \leqq b)$$

zu beschränken, um den allgemeinen Fall zu bewältigen. Bei den Integralgleichungen erster Art ist das anders; hier hat die „Kernintegralgleichung“

$$K(s,r) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

von ganz speziellen Fällen abgesehen, keine Lösung, ist also unbrauchbar. Die Integralgleichungen erster Art werden aber schmiegsamer, wenn der Kern außer von den beiden Variabelen s und t noch von einem Parameter λ abhängt, derart, daß er von ihm nicht durch Division mit einer Funktion von λ allein befreit werden kann. Dann hat nämlich die Kernintegralgleichung

$$K(s,r;\lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta(t,\lambda)\,dt \tag{2}$$

für sehr viele Kerne wirklich eine Lösung, wenn nur λ in einem gewissen durch λ_1 bestimmten Intervalle liegt. Von diesen Kernintegralgleichungen kann man dann auch Schlüsse auf die allgemeine Integralgleichung erster Art

$$f(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta(t,\lambda)\,dt \tag{3}$$

ziehen. Ferner wird es oft von Interesse sein, eine Lösung auch für weitere Parameterwerte λ, die nicht in dem oben bezeichneten Intervalle liegen, zu besitzen. Das ist natürlich bei der Gleichung (2) unmöglich; wir werden aber später verschiedene Methoden angeben, wie man die Gleichung (2) unter Umständen passend modifizieren kann, sodaß eine Lösung für einen größeren Bereich von λ existiert.

Das Wesentliche nun an unseren potentialtheoretischen Problemen ist, daß sie uns auf solche Kernintegralgleichungen mit „nichtmultiplikativem“ Parameter führen. An diesen Beispielen können wir alle wesentlichen Eigenschaften der allgemeinen Kernintegralgleichung auffinden.

§ 2. Einige allgemeine Sätze.

Der für unsere Untersuchungen wichtigste Satz ist ein Resultat von Picard [1]). Dieser gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer samt ihrem Quadrate integrabelen Lösung der Integralgleichung erster Art (1). Weil wir in der Folge immer wieder auf diesen Satz Bezug nehmen, wollen wir ihn hier kurz ableiten. Zuvor aber wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken.

Betrachten wir neben der Gleichung (1) noch die folgende (homogene Integralgleichung zweiter Art):

$$\varphi(s) = k\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

so gibt es im allgemeinen abzählbar unendlich viele Werte des Parameters k ohne Häufungspunkt im Endlichen, für welche die Gleichung (4) durch nicht identisch verschwindendes $\varphi(t)$ befriedigt werden kann. Diese Werte von k, die „Eigenwerte“ des Kernes $K(s,t)$, sind alle reell, da wir $K(s,t)$ immer als symmetrisch vorausgesetzt haben; sie seien, der absoluten Größe nach geordnet,

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots.$$

Dabei soll jedes k so oft gezählt sein, als die zugehörige homogene Gleichung (4) verschiedene (d. h. linear unabhängige) Lösungen besitzt. Die Lösungen von (4) bezeichnen wir, entsprechend den k, mit

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots.$$

Diese Funktionen, die „Eigenfunktionen“ des Kernes $K(s,t)$, können wir so wählen, daß sie ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden, d. h. daß die Beziehungen gelten:

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n. \end{cases} \tag{5}$$

1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 29, S. 79—97.

Über diese Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ wollen wir noch die Annahme machen, daß das System der $\varphi_n(s)$ „abgeschlossen“ sei, d. h. daß die Gleichungen

$$\int_a^b h(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0 \tag{6}$$

für alle n gleichzeitig nur durch $h(t) \equiv 0$ befriedigt werden können. Wie E. Schmidt gezeigt hat, ist dies identisch damit, daß die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0 \quad \text{(für jedes } s\text{)} \tag{7}$$

nur durch $h(t) \equiv 0$ gelöst werden kann. Mit Rücksicht auf die S. 6 eingeführte Bezeichnung können wir diese Forderung auch so aussprechen: Der Kern $K(s,t)$ soll so beschaffen sein, daß das Kernintegral einer Funktion nur dann (identisch in s) verschwinden kann, wenn diese Funktion selbst identisch verschwindet. Eine unmittelbare Folge hiervon ist der Eindeutigkeitssatz:

> Eine Integralgleichung erster Art besitzt, wenn überhaupt, nur eine einzige Lösung, wenigstens, wenn der Kern oder, was dasselbe, das System der zugehörigen Eigenfunktionen abgeschlossen ist.

Wir nennen nun

$$a_n = \int_a^b f(r)\,\varphi_n(r)\,dr \tag{8}$$

die „Fourierkoeffizienten“ der Funktion f in diesem Orthogonalsystem. Über diese Koeffizienten hat E. Schmidt mit verhältnismäßig einfachen Mitteln den folgenden Satz bewiesen:

> Ist $f(s)$ eine im Intervall $a \ldots b$ selbst nebst ihrem Quadrate integrabele Funktion, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

E. Fischer hat dann gezeigt, daß sich dieser Satz auch umkehren läßt[1]), wozu freilich weit tiefer liegende Hilfsmittel nötig sind; wir können daher auch sagen:

> Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ der gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, so existiert stets eine Funktion $f(s)$, welche selbst nebst ihrem Quadrate (im Lebesguesschen Sinne) integrierbar ist und welche jene Zahlen zu Fourierkoeffizienten hat.

1) Unabhängig davon hat M. Riesz ungefähr gleichzeitig denselben Satz gefunden.

Läßt sich diese Funktion $f(s)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen φ entwickeln, so sind, wie leicht mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaft der φ zu sehen ist, die a_n die Koeffizienten der Entwicklung. Nicht immer aber konvergiert umgekehrt die mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s)$. Deshalb wollen wir uns der folgenden Symbolik

$$f(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s)\right] \tag{9}$$

bedienen, um anzudeuten, daß die a_n die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(s)$ sind [1]). Konvergiert die Reihe rechts gleichmäßig, so ist (9) als wirkliche Gleichung im gewöhnlichen Sinne aufzufassen.

Dann können wir die Sätze von Schmidt und Fischer zusammenfassend auch so formulieren:

> Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(s)$ sind, oder, was dasselbe ist, dafür, daß die symbolische Gleichung (9) gilt, besteht in der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Wir sind jetzt in der Lage, das erwähnte Picardsche Kriterium zu formulieren und zu beweisen; es lautet:

> Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichung
>
> $$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \tag{1}$$
>
> eine Lösung besitzt, welche selbst nebst ihrem Quadrate integrierbar ist, ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 a_n^2$.

Zunächst läßt sich leicht zeigen, daß diese Bedingung notwendig ist. Es sei also die Gleichung (1) unter den angegebenen Bedingungen erfüllt; dann ist

---

1) Wir folgen dabei dem Beispiele von A. Hurwitz (vgl. Math. Ann. 57), der sich der Schreibweise $f(s) \sim \sum a_n \varphi_n(s)$ bedient; wir wollen aber die obige benutzen, da sie mehr an eine wirkliche Gleichung erinnert und in unseren Beispielen auch immer eine solche ist.

$$a_n = \int_a^b f(s)\,\varphi_n(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\varphi_n(s)\,\eta(t)\,ds\,dt,$$

und weiter folgt daraus (mit Rücksicht auf (4))

$$k_n a_n = \int_a^b \eta(t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{10}$$

Es sind also $k_n a_n$ die Fourierkoefffizienten von $\eta(t)$ in bezug auf das System der φ_n. Demnach muß nach dem oben angegebenen Satz von E. Schmidt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 a_n^2$ konvergieren, wenn $\eta(t)$ existiert.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß diese Reihe konvergiert. Dann existiert nach dem Satz von Fischer eine Funktion $\eta(t)$, welche $k_n a_n$ zu Fourierkoeffizienten hat. Wir setzen nun

$$f_1(s) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt.$$

Dann läßt sich leicht zeigen, daß $f(s)$ und $f_1(s)$ dieselben Fourierkoeffizienten a_n haben, und daraus folgt (wegen der Annahme, daß das System der φ_n geschlossen ist), daß $f(s)$ und $f_1(s)$ identisch sind (vgl. (6)), und damit ist die Picardsche Bedingung auch als hinreichend erwiesen.

Das in diesen Überlegungen enthaltene Resultat wollen wir (wegen späterer Anwendung) noch in dem folgenden Satz aussprechen, der in vielen Fällen über den bloßen Nachweis der Existenz auch noch eine Darstellung der Lösung liefert:

Wenn überhaupt eine Lösung der Integralgleichung

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \tag{1}$$

existiert (wenn also $\sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n^2$ konvergent ist), so ist dieselbe definiert durch die symbolische Gleichung

$$\eta(t) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} (k_n a_n)\,\varphi_n(t)\Big]. \tag{11}$$

Ist diese Reihe gleichmäßig konvergent, so haben wir in (11) eine Gleichung im eigentlichen Sinne und damit eine Darstellung unserer Lösung $\eta(t)$.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt aus dem vorangehenden Beweis des Picardschen Satzes.

§ 3. Durchführung des C. Neumannschen Gedankenganges beim Kreise und Diskussion der resultierenden Gleichung.

Die zu dem innern Pole $i(\varrho_i)$ [1]) gehörige stetige Greensche Funktion $G_j^{(i)}$ des Kreises mit dem Radius A, welchen wir den Grundkreis nennen wollen, können wir darstellen durch das Potential einer einfachen Belegung dieses Kreises, nämlich der Greenschen Belegung

$$\gamma_{i\sigma}^{(i)} = \frac{1}{2\pi A}\,\frac{A^2-\varrho_i^2}{E_{i\sigma}^2}$$ [2]).

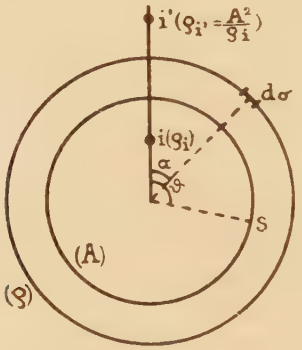

Fig. 1.

Andererseits ist, wie oben bemerkt, $G_j^{(i)}$ im wesentlichen das Potential des zu dem Pole i konjugierten äußeren Punktes i' $\left(\varrho_{i'} = \frac{A^2}{\varrho_i}\right)$. Genauer gilt die Formel

$$G_j^{(i)} = \log\frac{1}{E_{i'j}} + C \qquad \left(C = \log\frac{A}{\varrho_i}\right). \tag{12}$$

Nach dem Gedankengang von C. Neumann wollen wir nun einen etwas größeren konzentrischen Kreis (ϱ) betrachten und versuchen, ihn so mit Masse zu belegen, daß sein Potential im Innern des Grundkreises diese Greensche Funktion $G_j^{(i)}$ darstellt, d. h. dort (von der leicht zu berücksichtigenden Konstanten C abgesehen) mit dem Potential der Masse Eins in i' übereinstimmt. Das Potential einer solchen Belegung von (ϱ) muß dann mit dem Potential dieses Massenpunktes i' übereinstimmen über den Grundkreis (A) hinaus in jedem zusammenhängenden massefreien Gebiete. Das

1) Wir benutzen im Folgenden Polarkoordinaten ϱ, ϑ mit dem Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt; i kann selbstverständlich auf der Polarachse angenommen werden.

2) Vgl. E. Mathieu, Theorie des Potentials, übers. von H. Maser, S. 60.

ist aber augenscheinlich unmöglich, sobald i' innerhalb (ϱ) liegt, da das Potential der Belegung von (ϱ) sicher unterhalb einer gewissen endlichen Grenze bleibt.

Sobald aber i' ein Punkt außerhalb von (ϱ) ist, kann man tatsächlich eine Belegung von (ϱ) ermitteln, welche mit i' im ganzen Innern von (ϱ) äquipotential ist; es ist dies eben die zum äußeren Punkte i' gehörige Greensche Belegung von (ϱ)

$$\eta_{(\varrho)}^{(i')} = \frac{1}{2\pi\varrho}\,\frac{\varrho_{i'}^2 - \varrho^2}{E_{\varrho i'}^2}.$$

Ebenso ist die Belegung, deren Potential im ganzen Innern die Konstante C liefert, leicht anzugeben, nämlich

$$\eta^* = \frac{C}{2\pi\varrho \log\dfrac{1}{\varrho}}.$$

Ist also i' außerhalb (ϱ) gelegen, so ist die Dichtigkeit der gesuchten Belegung von (ϱ), deren Potential die Greensche Funktion (12) darstellt, gegeben durch [1])

$$\eta = \eta^{(i')} + \eta^* = \frac{1}{2\pi\varrho}\left(\frac{\varrho_{i'}^2 - \varrho^2}{E_{\varrho i'}^2} + \frac{C}{\log\dfrac{1}{\varrho}}\right).$$

Hiermit ist der C. Neumannsche Gedankengang im Falle des Kreises durchgeführt.

Versuchen wir nun ferner einen zu (A) konzentrischen kleineren Kreis (ϱ) so mit Masse zu belegen, daß sein Potential in allen Randpunkten s von (A) den Wert $\log\dfrac{1}{E_{is}}$ hat (von der Darstellung der Greenschen Funktion kann hier natürlich nicht mehr die Rede sein), so muß dieses Potential überall außerhalb von (ϱ) mit dem Potentiale von i übereinstimmen, und daraus folgt ebenso wie oben, daß i ein innerer Punkt von ϱ sein muß. Und ist dies der Fall, so läßt sich die Aufgabe wieder stets lösen mit Hilfe der zum inneren Pole i gehörigen Greenschen Belegung des Kreises (ϱ).

Wir haben so durch potentialtheoretische Überlegungen gezeigt, daß wir alle und nur die Kreise, welche zwischen i und

1) Wegen des im Nenner auftretenden $\log\dfrac{1}{\varrho}$ soll der „singuläre“ Fall $\varrho = 1$ von vorn herein ausgeschlossen sein.

seinem konjugierten Punkte $i'\left(\varrho_{i'} = \frac{A^2}{\varrho_i}\right)$ liegen, so mit Masse belegen können, daß ihr Potential allenthalben auf dem Rande von (A) den Wert $\log \frac{1}{E_{is}}$ hat (vgl. Satz S. 17).

Wir wollen nun zeigen, daß wir zu derselben Grenze auch durch das Picardsche Kriterium kommen; wir haben dann in dem Obigen eine Bestätigung für diesen in der Folge so oft angewandten Satz gefunden.

Unser Problem führt auf folgende Bedingungsgleichung für die Dichtigkeit $\bar{\eta}$ der Belegung des Kreises (ϱ):

$$\int_{(\varrho)} \bar{\eta}_\sigma \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\sigma = \log \frac{1}{E_{is}}. \tag{13}$$

Dies ist eine Integralgleichung erster Art, deren Kern $\log \frac{1}{E_{\sigma s}}$ aber noch von einem nichtmultiplikativen Parameter abhängt, dem Radius des Kreises (ϱ). Die beiden Variabeln sind hier σ und s oder, was dasselbe ist, ihre Amplituden α und ϑ (vergl. Figur 1); in diesen Variabeln ist der Kern symmetrisch. Die Funktion $\log \frac{1}{E_{is}}$, welche an Stelle der freien Funktion $f(s)$ tritt, hängt, bei festgehaltenem i, nur von dem einen Punkte s oder, was gleichbedeutend ist, nur von dem Azimut ϑ ab. Wir können also diese Gleichung in derselben Form schreiben wie (2) S. 7; dazu setzen wir ($\varrho > A$ angenommen)

$$\left\{\begin{aligned} \log \frac{1}{E_{\sigma s}} &= \log \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{A}{\varrho}\right)^n \cos n(\vartheta - \alpha) = K(\vartheta, \alpha; \varrho) \\ \log \frac{1}{E_{is}} &= \log \frac{1}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_i}{A}\right)^n \cos n\vartheta = f(\vartheta) = K(\vartheta, o; \varrho_i). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dabei haben wir die bekannte Reihenentwicklung für den Logarithmus der reziproken Entfernung benutzt. Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber im Kern den Parameter ϱ nicht angeben; ebenso wollen wir statt $K(\vartheta, o; \varrho)$ einfach $f(\vartheta)$ schreiben.

Schließlich ist

$$d\sigma = \varrho d\alpha.$$

Wenn wir also

$$\varrho \bar{\eta}_\sigma = \eta(\alpha)$$

setzen, so nimmt die Gleichung (13) als Bedingungsgleichung für diese Funktion $\eta(\alpha)$ die Gestalt an

$$(13') \qquad f(\vartheta) = \int_0^{2\pi} K(\vartheta, \alpha)\, \eta(\alpha)\, d\alpha.$$

Und nun wollen wir mit Hilfe des Picardschen Kriteriums untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Gleichung eine Lösung besitzt. Um dasselben anzuwenden, müssen wir zunächst noch die Eigenfunktionen und Eigenwerte unseres Kernes bestimmen, was uns mit Hilfe der obigen Reihenentwicklung für $K(\vartheta, \alpha)$ leicht gelingt. Wir müssen dazu die Gleichung betrachten

$$\varphi(\vartheta) = k \int_0^{2\pi} K(\vartheta, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Aus ihr und der Entwicklung (14) folgt

$$\varphi(\vartheta) = k \int_0^{2\pi} \left[\log \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{A}{\varrho} \right)^n (\cos n\vartheta \cos n\alpha + \sin n\vartheta \sin n\alpha) \right] \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Wir erkennen sofort (was bei Einsetzen sich leicht bestätigt), daß diese Gleichung bei passender Wahl der k befriedigt wird durch die Funktionen

$$\cos n\vartheta \quad \text{und} \quad \sin n\vartheta,$$

wobei n alle ganzzahligen Werte von 0 bis ∞ durchläuft. Diese Funktionen sind zwar noch nicht normiert, doch können wir das sofort durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor erreichen, sodaß

$$(15) \qquad \varphi_{01}(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{n1}(\vartheta) = \frac{\cos n\vartheta}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{n2}(\vartheta) = \frac{\sin n\vartheta}{\sqrt{\pi}}$$

das normierte Orthogonalsystem ist.

Die zu diesen Eigenfunktionen gehörigen Eigenwerte ergeben sich dann zu

$$(16_1) \qquad k_{01} = \frac{1}{2\pi \log \frac{1}{\varrho}} = k_0, \quad k_{n1} = k_{n2} = \frac{n}{\pi} \frac{\varrho^n}{A^n} = k_n \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Hiernach ist die Entwicklung (14) nichts anderes als die bekannte und in der Integralgleichungstheorie so wichtige Entwicklung des Kernes nach Eigenfunktionen

$$K(s, t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s)\, \varphi_n(t)}{k_n},$$

(welche aber nicht bei allen stetigen und symmetrischen Kernen möglich ist)[1]).

Schließlich gebrauchen wir für das Picardsche Kriterium noch die Fourierkoeffizienten der freien Funktion, also hier die Größen

$$a_{n1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\sqrt{\pi}} f(\vartheta)\, d\vartheta \text{ und } a_{n2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\vartheta}{\sqrt{\pi}} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Das ergibt, wenn wir für $f(\vartheta) = \log \frac{1}{E_{is}}$ die Reihenentwicklung (14) einsetzen,

$$(16_2) \qquad a_{n1} = a_{n2} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\varrho_i^n}{A^n} = a_n$$

und dazu noch

$$a_0 = \sqrt{2\pi} \cdot \log \frac{1}{A}.$$

Demnach ist die Picardsche Reihe

$$(17) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 (a_{n1}^2 + a_{n2}^2) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\log \frac{1}{A}}{\log \frac{1}{\varrho}} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi} \frac{\varrho^n}{A^n} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\varrho_i^n}{A^n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\log \frac{1}{A}}{\log \frac{1}{\varrho}} \right)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho \varrho_i}{A^2} \right)^{2n}.$$

Sie konvergiert stets, wenn $\varrho_i \varrho < A^2$, d. h. wenn

$$\varrho < \varrho_{i'} = \frac{A^2}{\varrho_i}$$

ist, divergiert aber für

$$\varrho \geqq \varrho_{i'}.$$

Nach dem Picardschen Kriterium existiert also für $A < \varrho < \varrho_{i'}$ immer und für ein größeres ϱ nie eine Lösung. Wir finden hier somit für den „Belegungskreis", wie wir den variabeln Kreis wohl auch nennen können, dieselbe obere Grenze wie oben auf potentialtheoretischem Wege.

1) Daß $\log \frac{1}{E_{os}}$ in dieser Weise entwickelbar ist, deckt sich bestens mit dem Mercerschen Satze, nach welchem jeder definite Kern nach Eigenfunktionen entwickelbar ist; und daß dieser Kern definit ist, läßt sich leicht potentialtheoretisch beweisen.

Der Vollständigkeit halber und wegen der Analogie mit den späteren Beispielen wollen wir nun auch noch die untere Grenze für ϱ bestimmen. Sie ergibt sich sofort, wenn wir berücksichtigen, daß für $\varrho < A$ unser Kern die Entwicklung hat

$$\log\frac{1}{E_{\sigma s}} = \log\frac{1}{A} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{A}\right)^n \cos n\,(\vartheta - \alpha). \tag{14'}$$

Setzen wir diesen Wert in die homogene Integralgleichung ein, so ergeben sich die Eigenwerte

$$k_0 = \frac{1}{2\pi\log\frac{1}{A}}, \qquad k_n = \frac{n}{\pi}\frac{A^n}{\varrho^n}. \qquad (n = 1, 2, 3\ldots) \tag{16'}$$

Die Eigenfunktionen und somit auch die Fourierkoeffizienten sind dieselben geblieben. Die Picardsche Reihe ist also in diesem Falle

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2\,(a_{n1}^2 + a_{n2}^2) = \frac{1}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\frac{A^n}{\varrho^n}\right)^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\varrho_i^n}{A^n}\right)^2 \tag{17'}$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^2.$$

Diese Reihe konvergiert für $A > \varrho > \varrho_i$, divergiert aber für $\varrho \leqq \varrho_i$.

Wir erhalten demnach auch auf diesem zweiten Wege den folgenden Satz:

> Ist ein Kreis (A) gegeben und ein Punkt i innerhalb desselben, so lassen sich alle und nur die zu (A) konzentrischen Kreise, welche zwischen i und seinem konjugierten Punkt i' $\left(\varrho_{i'} = \frac{A^2}{\varrho_i}\right)$ liegen, derart mit Masse belegen, daß das Potential des Belegungskreises auf dem Grundkreis den Wert $\log\frac{1}{E_{is}}$ hat.
>
> Ist speziell der letztere der kleinere von den beiden, so stellt das Potential des Belegungskreises im ganzen Innern des Grundkreises die zu diesem gehörende Greensche Funktion $G^{(i)}$ dar.

Dasselbe Resultat hätten wir gefunden, wenn wir ausgegangen wären von der Greenschen Funktion des Außengebietes, wie sie zum Pole a gehört. Dann ist $\varrho_a > A$, und es hätten in den obigen Überlegungen nur die Fourierkoeffizienten die anderen Bedeutungen gehabt:

$$a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{A^n}{\varrho_a^n}.$$

Wir sehen sofort, daß die Picardsche Reihe wieder für alle zwischen ϱ_a und $\varrho_{a'} = \frac{A^2}{\varrho_a}$ liegenden Werte von ϱ, und nur für diese, konvergiert.

Wir haben so den Gedankengang von C. Neumann auch analytisch durchgeführt, bis auf den Nachweis, daß sich die Belegung von (ϱ) bei der Annäherung dieses Kreises an i' immer mehr und mehr gegen i' hin verdichtet, sodaß sich schließlich die Belegung des Kreises in der Grenze zerspaltet in einen Punkt von der Masse Eins (eben i') und in eine homogene Belegung (welche die Konstante C liefert). Man könnte das leicht durchführen, doch hat es für unsere weiteren Untersuchungen kein besonderes Interesse.

§ 4. Das Ellipsenproblem und die Bedingungen für seine Lösbarkeit.

Dieselben Untersuchungen wie beim Kreise wollen wir nun auch bei der Ellipse durchführen. Wie wir schon S. 5 erwähnten, hat E. R. Neumann die Greensche Funktion der Ellipse im ganzen Innern durch das Potential eines gewissen Punktsystemes auf einer konfokalen Hyperbel dargestellt. Wir benutzen daher bei diesen Untersuchungen zweckmäßig elliptische Koordinaten λ, ϑ; diese sind definiert durch

$$(18) \qquad \begin{cases} x = e^{-c}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right)\cos\vartheta \\ y = e^{-c}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right)\sin\vartheta. \end{cases}$$

Dabei sei bemerkt, daß wir mit $\lambda = L$ die Koordinate der ursprünglich vorgegebenen Ellipse kennzeichnen wollen; diese werden wir, analog dem „Grundkreise“ (A) als „Grundellipse“ (L) bezeichnen. Einen durch einen bestimmten inneren bezw. äußeren Punkt gehende Ellipse wollen wir (λ_i) bezw. (λ_a) nennen. Endlich soll (λ) schlechtweg irgend eine beliebige Ellipse bedeuten, welche wir gelegentlich (aus später zu ersehendem Grunde) auch „Belegungsellipse“ nennen werden. Da wir stets über die Ellipse (λ) integrieren, so sei σ ein Punkt, $d\sigma$ ein Element von (λ), während s immer einen Punkt der Grundellipse bedeuten soll. Wissen wir, auf welcher Ellipse ein Punkt liegt, so genügt zu seiner genauen

Festlegung nach (18) die Angabe von ϑ, welches wir bei der Integration auch mit α bezeichnen werden.

Die Neumannschen Ersatzpunkte zerfallen in zwei Teilsysteme i'_n und i''_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten dieser Punkte hängen natürlich von denen des Poles i der Greenschen Funktion ab, und zwar ist[1]):

$$\lambda_{i'_n} = (n+1)\,2L - \lambda_i \text{ und } \vartheta_{i'_n} = \begin{cases} \vartheta_i, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 2\pi - \vartheta_i, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\lambda_{i''_n} = (n+1)\,2L + \lambda_i \text{ und } \vartheta_{i''_n} = \begin{cases} 2\pi - \vartheta_i, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \vartheta_i, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Ersatzpunkte liegen also sämtlich auf der konfokalen Hyperbel, welche durch den Pol i geht.

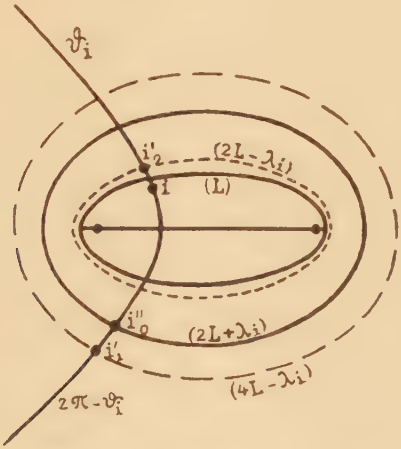

Fig. 2.

Mit Hilfe dieser Punkte drückt sich nun die Greensche Funktion im ganzen Innern aus durch die Formel[2])

$$19) \quad G_j^{(i)} = \Gamma + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\log \frac{1}{E_{i'_{2\nu}j}} + \log \frac{1}{E_{i''_{2\nu}j}} - \log \frac{1}{E_{i'_{2\nu+1}j}} - \log \frac{1}{E_{i''_{2\nu+1}j}} - 4L \right)$$

wo $\Gamma = c - L$ ist. Zwischen dieser Darstellung der Greenschen Funktion und der als Potential der Greenschen Belegung vermittelt der in der Einleitung geschilderte Gedankengang einen stetigen Übergang. Wir suchen also eine Ellipse (λ) so mit Masse zu belegen, daß ihr Potential auf der Grundellipse allenthalben

1) Vgl. E. R. Neumann, Beiträge, S. 137 (6) und (6').
2) a. a. O. S. 141.

den Wert $\log \frac{1}{E_{is}}$ hat. Unser nächstes Ziel ist, die Grenzen zu bestimmen, in denen λ sich bewegen kann, damit eine derartige Belegung möglich ist. Die Überlegungen, die wir dann weiterhin an dieses Beispiel anknüpfen wollen, werden uns das Material liefern für allgemeinere Untersuchungen über die Integralgleichungen erster Art, deren Kern noch von einem nicht multiplikativem Parameter abhängt. Außerdem bietet ja unser Ellipsenproblem schon an sich soviel Interesse, daß eine ausführliche Behandlung gerechtfertigt erscheint.

Für jene Dichtigkeit, welche wir wieder mit $\bar{\eta}_o$ bezeichnen wollen, erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$\int_{(\lambda)} \bar{\eta}_o \log \frac{1}{E_{os}} d\sigma = \log \frac{1}{E_{is}}$$

und hierin erkennen wir, ebenso wie beim Kreise, eine Integralgleichung erster Art. Der Kern $\log \frac{1}{E_{os}}$ ist wieder eine symmetrische Funktion von α und ϑ, während $\log \frac{1}{E_{is}}$ nur von ϑ abhängt; dabei haben wir zur Abkürzung $\vartheta_s = \vartheta$, $\vartheta_u = \alpha$ gesetzt (vergl. S. 19). Der nichtmultiplikative Parameter, der sowohl in dem Kern wie in der freien Funktion steckt, ist hier die Koordinate der Integrationsellipse bezw. der Ellipse durch i.

Zufolge (18) ist

$$d\sigma = e^{-c\sqrt{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2\cos 2\alpha}}\, d\alpha. \tag{20}$$

Deshalb setzen wir zur Abkürzung

$$\bar{\eta}_o \cdot e^{-c\sqrt{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2\cos 2\alpha}} = \bar{\eta}_o \cdot \gamma(\alpha) = \eta(\alpha) \tag{21}$$

wo also

$$\gamma(\alpha) = e^{-c\sqrt{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2\cos 2\alpha}} \tag{21'}$$

ist. Dann geht die obige Gleichung über in die folgende Bedingungsgleichung für diese Funktion $\eta(\alpha)$:

$$\int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{os}} d\alpha = \log \frac{1}{E_{is}}. \tag{22}$$

Um zu untersuchen, ob überhaupt und unter welchen Bedingungen sie eine Lösung hat, wollen wir wieder das Picardsche Kriterium anwenden. Dieses aber verlangt die Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen unseres Kernes. Wir müssen also,

ebenso wie bei dem Problem für den Kreis (vgl. S. 15) die homogene Gleichung zweiter Art

$$\varphi(\vartheta) = k\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\log\frac{1}{E_{\alpha s}}\,d\alpha$$

lösen. Das gelingt uns auch hier wieder leicht wegen der bekannten Entwicklung des Kernes

$$(23)\qquad \log\frac{1}{E_{\alpha s}} = (c-\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nL}+e^{-nL}}{ne^{n\lambda}}\cos n\vartheta\cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nL}-e^{-nL}}{ne^{n\lambda}}\sin n\vartheta\sin n\alpha.$$

Dabei haben wir vorerst die Annahme gemacht, es sei $\lambda > L$. Setzen wir diese Reihe in die homogene Gleichung ein, so erhalten wir

$$\varphi(\vartheta) = k(c-\lambda)\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha + k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nL}+e^{-nL}}{ne^{n\lambda}}\cos n\vartheta\int_0^{2\pi}\cos n\alpha\cdot\varphi(\alpha)\,d\alpha + k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nL}-e^{-nL}}{ne^{n\lambda}}\sin n\vartheta\int_0^{2\pi}\sin n\alpha\cdot\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Hieraus ersehen wir sofort, daß

$$\varphi_{n1}(\alpha) = \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{\pi}} \text{ und } \varphi_{n2}(\alpha) = \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

die Gleichung befriedigen und daß die zu diesen Eigenfunktionen gehörenden Eigenwerte sind:

$$k_{n1} = \frac{n}{\pi}\frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}+e^{-n\lambda}} \quad \text{und} \quad k_{n2} = \frac{n}{\pi}\frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}-e^{-n\lambda}}.$$

Dazu kommt noch

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{c-\lambda}.$$

Damit haben wir das vollständige normierte Orthogonalsystem für den vorliegenden Kern ermittelt. Daß wirklich keine weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen hinzutreten können, folgt leicht daraus, daß nach G. Cantor bekanntlich das System der cosinus und sinus der ganzzahligen Vielfachen des Argumentes abgeschlossen ist. Die bisherigen Resultate können wir zusammenfassen in dem folgenden Satze:

Unser Problem führt uns auf die Gleichung

$$(22) \qquad \log \frac{1}{E_{is}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{os}}\, d\alpha.$$

Unter der Annahme, daß die Belegungsellipse die Grundellipse einschließt (also für $\lambda > L$), sind die Eigenwerte des Kernes $\log \frac{1}{E_{os}}$ gegeben durch

$$(24_1) \qquad \begin{cases} k_0 = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{c-\lambda}, & k_{n1} = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{e^{n\lambda}}{e^{nL}+e^{-nL}} \\ & k_{n2} = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{e^{n\lambda}}{e^{nL}-e^{-nL}} \end{cases}$$

Die zu diesen Eigenwerten gehörenden normierten Eigenfunktionen sind

$$(24_2) \quad \varphi_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{n1}(\alpha) = \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{n2}(\alpha) = \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$

Aus ihnen folgen dann die Fourierkoeffizienten der Funktion $\log \frac{1}{E_{is}}$ als

$$(25) \qquad \begin{cases} a_0 = \sqrt{2\pi}\,(c-L), & a_{n1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{n} \dfrac{e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i}}{e^{nL}} \cos n\vartheta_i \\ & a_{n2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{n} \dfrac{e^{n\lambda_i}-e^{-n\lambda_i}}{e^{nL}} \sin n\vartheta_i \end{cases}$$

Der letzte Teil des Satzes folgt durch Einsetzen der Reihenentwicklung

$$\log \frac{1}{E_{is}} = (c-L) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i}}{ne^{nL}} \cos n\vartheta_i \cos n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\lambda_i}-e^{-n\lambda_i}}{ne^{nL}} \sin n\vartheta_i \sin n\vartheta$$

in die Definitionsgleichung der a (vgl. (8) S. 9).

Nun haben wir alle Größen zur Anwendung des Picardschen Kriteriums ermittelt. Wir bilden also

$$(26) \quad \sum k^2 a^2 = k_0^2 a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (k_{n1}^2 a_{n1}^2 + k_{n2}^2 a_{n2}^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c-L}{c-\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{2n\lambda}(e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i})^2}{e^{2nL}(e^{nL}+e^{-nL})^2} \cos^2 n\vartheta_i + \frac{e^{2n\lambda}(e^{n\lambda_i}-e^{-n\lambda_i})^2}{e^{2nL}(e^{nL}-e^{-nL})^2} \sin^2 n\vartheta_i \right].$$

Bei hinreichend großem n können wir in den Klammern die Potenzen mit negativen Exponenten vernachlässigen, sodaß sich die Glieder der Summe immer mehr dem Werte

$$v_n = \frac{e^{2n\lambda}\, e^{2n\lambda_i}}{e^{2nL}\, e^{2nL}} = \left(\frac{e^{2\lambda}\, e^{2\lambda_i}}{e^{4L}}\right)^n$$

nähern, also denen einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\left(\frac{e^{\lambda}\, e^{\lambda_i}}{e^{2L}}\right)^2$. Die Reihe (26) konvergiert also, sobald

$$\lambda < 2L - \lambda_i$$

ist. Andererseits folgt aus dem Werte für v_n sofort, daß für $\lambda \geqq 2L - \lambda_i$ die Picardsche Reihe divergiert. Wir haben somit die genaue obere Grenze für λ gefunden.

Auch die untere Grenze für die Lösbarkeit der Gleichung (22) können wir leicht bestimmen; sie ist sicher $\leqq L$; denn für $\lambda = L$ hat sie eine Lösung in der Greenschen Belegung, und für $\lambda > L$ gelten die obigen Überlegungen. Ist aber $\lambda < L$, so tritt an die Stelle von (23) die Entwicklung

$$(23') \qquad \log \frac{1}{E_{os}} = (c - L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}{n e^{nL}} \cos n\vartheta \cos n\alpha + \frac{e^{n\lambda} - e^{-n\lambda}}{n e^{nL}} \sin n\vartheta \sin n\alpha \right).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die homogene Gleichung ein, so sehen wir, daß der folgende Satz gilt:

Unter der Annahme, daß die Belegungsellipse von der Grundellipse eingeschlossen wird (also für $\lambda < L$), sind die Eigenwerte des Kernes $\log \frac{1}{E_{os}}$ gegeben durch

$$(24') \qquad k_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c - L}, \qquad k_{n1} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}$$

$$k_{n2} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda} - e^{-n\lambda}}$$

während die Eigenfunktionen und demnach auch die zugehörigen Fourierkoeffizienten der Funktion $\log \frac{1}{E_{is}}$ dieselben geblieben, also nach wie vor durch (24_2) und (25) gegeben sind.

In diesem Falle ist somit die Picardsche Reihe

$$(26') \quad k_0^2 a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (k_{n1}^2 a_{n1}^2 + k_{n2}^2 a_{n2}^2)$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{n\lambda_i} + e^{-n\lambda_i}}{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}} \right)^2 \cos^2 n\vartheta_i + \left(\frac{e^{n\lambda_i} - e^{-n\lambda_i}}{e^{n\lambda} - e^{-n\lambda}} \right)^2 \sin^2 n\vartheta_i \right].$$

Ganz ähnliche Überlegungen wie oben führen zu dem Resultat, daß die Reihe konvergiert für

$$\lambda > \lambda_i$$

während sie für $\lambda \leq \lambda_i$ divergiert, sodaß λ_i die genaue untere Grenze für λ ist. Wir können das Hauptergebnis, welches völlig analog dem beim Kreise ist, zusammenfassen in den folgenden Satz:

> Ist eine Ellipse (L) gegeben und ein Punkt i innerhalb derselben, so lassen sich alle und nur die zu denselben Brennpunkten gehörenden Ellipsen, welche zwischen i und dem ersten jener E. R. Neumannschen Ersatzpunkte $i_0(2L - \lambda_i, \vartheta_i)$ (dem Spiegelpunkte zu i) liegen, derart mit Masse belegen, daß das Potential der Belegungsellipse auf der Grundellipse allenthalben den Wert $\log \frac{1}{E_{is}}$ hat.
>
> Ist speziell $\lambda > L$, so stellt das Potential der Belegungsellipse im ganzen Innern der Grundellipse die zu dieser gehörende Greensche Funktion $G^{(i)}$ dar.

Bei der entsprechenden Gleichung, die wir erhalten, wenn wir von der Greenschen Funktion des Außengebietes ausgehen, liegen die Verhältnisse etwas anders als beim Kreise. Wir wollen sie, da sie für unsern Hauptzweck nicht weiter in Betracht kommt aber doch potentialtheoretisch einiges Interesse bietet, in einem Anhange behandeln.

§ 5. Herleitung und Diskussion der Lösung unsrer Integralgleichung.

Das Resultat der bisherigen Untersuchungen war die Ermittlung des Intervalles für den Parameter λ, in dem die Integralgleichung (22) eine Lösung besitzt. Wir wollen dieses Intervall den „Lösungsbereich" der Integralgleichung nennen. Über die Lösung selbst aber haben wir noch nichts ausgesagt, und mit ihr wollen wir uns jetzt näher beschäftigen.

Nach dem Satz S. 11 können wir die Lösung in unserm Falle in folgender Weise durch die Eigenwerte und Eigenfunktionen darstellen, wenn $\lambda > L$ ist[1]):

$$(27)\quad \eta(\alpha) = \frac{c-L}{2\pi(c-\lambda)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{n\lambda}(e^{n\lambda_i} + e^{-n\lambda_i})}{e^{nL}(e^{nL} + e^{-nL})} \cos\vartheta_i \right) \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{e^{n\lambda}(e^{n\lambda_i} - e^{-n\lambda_i})}{e^{nL}(e^{nL} - e^{-nL})} \frac{\sin n\vartheta_i}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{\pi}} \right]$$

Hier brauchen wir das Klammersymbol nicht anzuwenden, da die Reihe gleichmäßig konvergiert (wie man durch ähnliche Überlegungen wie im vorigen Paragraphen leicht sieht).

Aus dieser Darstellung können wir zunächst noch nicht viel entnehmen (später werden wir noch einmal auf sie zurückgreifen). Wir wollen daher jetzt für $\eta(\alpha)$ einen andern Ausdruck, der für unsere weiteren Ziele geeigneter ist, herleiten, und zwar unter Benutzung der Resultate von E. R. Neumann, wie wir sie schon oben S. 19 angegeben haben.

Allgemein ist die Dichtigkeit der zum äußeren Punkte α gehörigen Greenschen Belegung einer Ellipse (λ), d. h. die im Innern mit diesem Punkte äquipotentielle Massenbelegung, gegeben durch[2])

$$(28)\quad \eta^{(\alpha)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi\gamma(\alpha)} \left(\frac{e^{\lambda_a - \lambda} - e^{-(\lambda_a - \lambda)}}{e^{\lambda_a - \lambda} - 2\cos(\alpha - \vartheta_a) + e^{-(\lambda_a - \lambda)}} + \frac{\lambda_a - \lambda}{\lambda - c} \right)$$

wo $\gamma(\alpha)$ die Bedeutung (21′) S. 20 hat. Wir bezeichnen nun die Dichtigkeiten der den vier äußeren Punkten $i'_{2\nu}$, $i''_{2\nu}$, $i'_{2\nu+1}$, $i''_{2\nu+1}$

1) Wegen des im Nenner stehenden $c - \lambda$ soll der Fall $\lambda = c$ von vornherein ausgeschlossen sein (vgl. den „singulären" Fall beim Kreise, Anm. S. 13).

2) Vgl. C. Neumann, Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Bd. 62, Zur Theorie des logarithmischen Potentials. Aufsatz II, S. 107.

entsprechenden Greenschen Belegungen, die nach (28) leicht zu berechnen sind, mit $\eta'_{2\nu}$, $\eta''_{2\nu}$, $\eta'_{2\nu+1}$, $\eta''_{2\nu+1}$, und ersetzen das Potential dieser vier Punkte durch das Potential jener Belegungen. Dann folgt für beliebige innere Punkte j:

$$(29)\quad \int_{(\lambda)} \left[\eta'_{2\nu}+\eta''_{2\nu}-\eta'_{2\nu+1}-\eta''_{2\nu+1}-4\cdot\frac{1}{2\pi\gamma(\alpha)}\frac{L}{c-\lambda}\right]\log\frac{1}{E_{\sigma j}}\,d\sigma$$

$$= \log\frac{1}{E_{i'_{2\nu}j}}+\log\frac{1}{E_{i''_{2\nu}j}}-\log\frac{1}{E_{i'_{2\nu+1}j}}-\log\frac{1}{E_{i''_{2\nu+1}j}}-4L$$

Das ist nun das allgemeine Glied der Summe (19) S. 19. Wenn wir also die Integrale (29) über alle ν summieren, so erhalten wir, abgesehen von der Konstanten $\Gamma = c - L$, den Wert $\log\frac{1}{E_{is}}$. Aber auch Γ können wir leicht als Kernintegral darstellen; es ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\lambda)}\frac{1}{\gamma(\alpha)}\frac{c-L}{c-\lambda}\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\sigma = c-L = \Gamma$$

wie sofort folgt, wenn wir für $\log\frac{1}{E_{\sigma s}}$ die Reihenentwicklung (23) S. 21 einsetzen. Wir erhalten demnach das folgende Resultat:

Das Problem, die Greensche Funktion $G^{(i)}$ der Ellipse (L) darzustellen als das Potential einer passend belegten größeren Ellipse (λ), führt uns auf die Forderung, eine Dichtigkeit $\bar{\eta}$ der Belegungsellipse (λ) so zu finden, daß die Gleichung

$$\int_{(\lambda)}\bar{\eta}_\sigma\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\sigma = \log\frac{1}{E_{is}}$$

erfüllt ist, oder wenn wir

$$\bar{\eta}_\sigma = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\eta(\alpha) \qquad \text{(vgl. (21) S. 20)}$$

setzen, auf die Aufgabe, die Integralgleichung

$$\int_0^{2\pi}\eta(\alpha)\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\alpha = \log\frac{1}{E_{is}}$$

zu lösen. Dabei ist $2L-\lambda_i$ die genaue obere Grenze für λ. Setzen wir weiter $\lambda > L$ voraus, so hat die gesuchte Funktion $\eta(\alpha)$ den Wert

(30) $$\eta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\frac{c-L}{c-\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma(\alpha)\left[\eta'_{2\nu} + \eta''_{2\nu} - \eta'_{2\nu+1} - \eta''_{2\nu+1} - 4\cdot\frac{1}{2\pi\gamma(\alpha)}\cdot\frac{L}{c-\lambda}\right].$$

Dabei sind $\eta'_{2\nu}$ u. s. w. die Dichtigkeiten der Greenschen Belegungen der Ellipse (λ), die zu den Punkten $i'_{2\nu}$ u. s. w. gehören. γ ist definiert durch

$$\gamma(\alpha) = e^{-c\sqrt{e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}-2\cos 2\alpha}}.$$

Zusatz: Die beiden Reihen (27) und (30) stellen nach dem Eindeutigkeitssatze S. 9 dieselbe Funktion dar.

Eine einfache Rechnung ergibt unter Benutzung von (28) für $\eta(\alpha)$ den Wert

(31) $$\eta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\frac{c-L}{c-\lambda} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}\right.$$
$$+ \frac{e^{(2L+\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(2L+\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L+\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha+\vartheta_i) + e^{-[(2L+\lambda_i)-\lambda]}}$$
$$- \frac{e^{(4L-\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(4L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(4L-\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha+\vartheta_i) + e^{-[(2L+\lambda_i)-\lambda]}}$$
$$\left. - \frac{e^{(4L+\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(4L+\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(4L+\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-[(4L+\lambda_i)-\lambda]}}\right] + \text{u. s. w.}$$

An diesen Ausdruck wollen wir nun weiter anknüpfen. Setzen wir ihn in die Integralgleichung ein und beachten, daß

$$\log\frac{1}{E_{os}} = (c+\lambda) - \log\left[e^{\lambda+L} + e^{-(\lambda+L)} - 2\cos(\alpha+\vartheta_s)\right]$$
$$- \log\left[e^{\lambda-L} + e^{-(\lambda-L)} - 2\cos(\alpha-\vartheta_s)\right]$$

ist, so kommen wir zunächst auf zwei Integrale von der Form

(32) $$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^b - e^{-b}}{e^b - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-b}} \log\left[e^a + e^{-a} - 2\cos(\alpha+\vartheta)\right] d\alpha$$

wo das eine Mal

$$a = a_1 = \pm(\lambda+L) \text{ und } \vartheta = \vartheta_s,$$

das andere Mal

$$a = a_2 = \pm(\lambda-L) \text{ und } \vartheta = -\vartheta_s,$$

und in beiden Fällen

$$b = \pm [(2L - \lambda_i) - \lambda]$$

zu setzen ist. Den Wert solcher Integrale hat E. R. Neumann in seinen Beiträgen S. 129 angegeben; danach ist

$$J = -\{b - \log [e^{a+b} - 2\cos(\vartheta_i + \vartheta) + e^{-(a+b)}]\}. \tag{33}$$

Bei diesen Formeln ist eine wesentliche Voraussetzung, daß a und b positive Größen sind, was wir aber stets erreichen können, wenn wir in den obigen Formeln die Vorzeichen passend wählen.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Es sei $\lambda < 2L - \lambda_i$ dann müssen wir, damit b positiv ist, setzen

$$b = +[(2L - \lambda_i) - \lambda]$$

dann sind die in (33) auftretenden Summen

$$a_1 + b = (2L - \lambda_i) + L$$
$$a_2 + b = (2L - \lambda_i) - L.$$

Es sei $\lambda > 2L - \lambda_i$ dann müssen wir, damit b positiv ist, setzen

$$b = -[(2L - \lambda_i) - \lambda]$$

dann sind die in (33) auftretenden Summen

$$a_1 + b = 2\lambda - (L - \lambda_i)$$
$$a_2 + b = 2\lambda - (3L - \lambda_i).$$

Auch hieraus ersehen wir leicht, daß in diesem zweiten Falle die Formel (31) nicht mehr die Lösung unserer Integralgleichung sein kann (wie ja auch (31) nur unter der Voraussetzung $\lambda < 2L - \lambda_i$ abgeleitet ist); denn jenes erste Glied in (31) liefert dann ein von λ abhängiges Integral, während die übrigen Glieder, solange

$$\lambda < 2L + \lambda_i,$$

von λ unabhängige Integrale geben; das Gesamtintegral aber soll die von λ unabhängige Funktion $\log \frac{1}{E_{is}}$ darstellen. — Das ist völlig im Einklang mit dem Resultate S. 24.

Wir sehen, daß beim Überschreiten der Grenze $2L - \lambda_i$ nur der Teil der Lösung eine unstetige Änderung erfährt, welcher dem Punkte i_0' entspricht; der übrige Teil dagegen ändert seinen Charakter nicht. Denn wenn wir mit dem zweiten Bruch in der eckigen Klammer von (31) dieselben Überlegungen anstellen wie oben mit dem ersten, so tritt hier an Stelle von b die Größe $b' = (2L + \lambda_i) - \lambda$, und diese bleibt positiv, auch wenn λ die Grenze $2L - \lambda_i$ überschreitet.

Jener erste Bestandteil der Lösung, welcher dem Punkte i_0' entspricht, liefert, wenn wir auf (30) zurückgreifen und die Be-

deutung von η_0' berücksichtigen, solange $\lambda < 2L - \lambda_i$ bleibt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}} + \frac{(2L-\lambda_i)-\lambda}{\lambda - c}\right]\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\alpha = \log\frac{1}{E_{i_0' s}}\,.$$

Wir können also sagen:

Zwar hat die Gleichung

$$\int_0^{2\pi}\eta(\alpha)\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\alpha = \log\frac{1}{E_{is}}$$

bei welcher wir jetzt immer $\lambda > L$ voraussetzen, eine Lösung dann und nur dann, wenn $\lambda < 2L - \lambda_i$ ist. Diese Lösung aber haben wir in (31) in einer solchen Form dargestellt, daß der Teil, welcher allein beim Überschreiten der Grenzellipse $(2L - \lambda_i)$ eine unstetige Änderung hervorruft, gesondert auftritt; und zwar hat das mit ihm gebildete Kernintegral den Wert $\log\frac{1}{E_{i_0' s}}$. Wir dürfen daher vermuten, daß die modifizierte Gleichung

$$\log\frac{1}{E_{is}} - \log\frac{1}{E_{i_0' s}} = \int_0^{2\pi}\eta'(\alpha)\log\frac{1}{E_{\sigma s}}\,d\alpha \tag{34}$$

in einem größeren Bereiche, also auch noch für gewisse Werte von $\lambda > 2L - \lambda_i$ eine Lösung habe.

Zu dieser Vermutung sind wir berechtigt, weil die Lösung von (34) für $\lambda < 2L - \lambda_i$ genau dieselbe ist wie die der ursprünglichen Gleichung, diese jedoch vermindert grade um den Teil, der beim Überschreiten der Grenze die unstetige Änderung verschuldet. Wir wollen nun mit Hilfe des Picardschen Kriteriums strenge nachweisen, daß die Gleichung (34) in der Tat in einem weiteren Umfange lösbar ist als die ursprüngliche.

Um dieses Kriterium anzuwenden, müssen wir die Fourierkoeffizienten des Ausdruckes $\log\frac{1}{E_{is}} - \log\frac{1}{E_{i_0' s}}$ berechnen. Für diese gilt, da $\lambda_{i_0'} = 2L - \lambda_i$ ist, die Darstellung

$$\log\frac{1}{E_{is}}-\log\frac{1}{E_{i_0's}}=(L-\lambda_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i}}{e^{nL}}-\frac{e^{nL}+e^{-nL}}{e^{n(2L-\lambda_i)}}\right]\cos n\vartheta_i\cos n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{n\lambda_i}-e^{-n\lambda_i}}{e^{nL}}-\frac{e^{nL}-e^{-nL}}{e^{n(2L-\lambda_i)}}\right]\sin n\vartheta_i\sin n$$

Demnach ergeben sich die gesuchten Fourierkoeffizienten leicht zu

$$(35)\quad\begin{cases}a_0=\sqrt{2\pi}(L-\lambda_i),\ a_{n1}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}\dfrac{e^{2n(L-\lambda_i)}-1}{e^{n(3L-\lambda_i)}}\cos n\vartheta_i\\ a_{n2}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}\dfrac{1-e^{2n(L-\lambda_i)}}{e^{n(3L-\lambda_i)}}\sin n\vartheta_i.\end{cases}$$

Die entsprechenden Eigenwerte des Kernes sind dieselben, wie schon in (24$_1$) S. 22 angegeben. Demnach lautet die Picardsche Reihe in diesem Falle

$$(36)\quad k_0^2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n1}^2a_{n1}^2+k_{n2}^2a_{n2}^2)$$

$$=\left(\frac{L-\lambda_i}{c-\lambda}\right)^2+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}+e^{-nL}}\cdot\frac{e^{2n(L-\lambda_i)}-1}{e^{n(3L-\lambda_i)}}\right)^2\cos^2 n\vartheta_i\right.$$

$$\left.+\left(\frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}-e^{-nL}}\,\frac{1-e^{2n(L-\lambda_i)}}{e^{n(3L-\lambda_i)}}\right)^2\sin^2 n\vartheta_i\right].$$

Bei hinreichend großem n können wir alle Potenzen mit negativem Exponenten vernachlässigen. Unsere Reihe konvergiert also wie die mit dem allgemeinen Glied

$$v_n=\left(\frac{e^{2(\lambda-\lambda_i)}}{e^{4L}}\right)^n.$$

Daher haben wir Konvergenz für $\lambda<2L+\lambda_i$. Da die Reihe für $\lambda\geqq 2L+\lambda_i$ divergiert, so haben wir hiermit die genaue obere Grenze für λ bestimmt. Auf die untere kommt es uns hier nicht an; ihretwegen vgl. den Anhang.

Wir haben also durch diese Modifikation (34) als neuen Lösungsbereich das Intervall von $2L-\lambda_i$ bis $2L+\lambda_i$ hinzugewonnen. Wollten wir noch größere Werte von λ verwenden, so sehen wir, daß diesem Vorhaben jetzt das zweite Element der eckigen Klammer in (31) hindernd im Wege steht; denn der entsprechende Integralanteil ändert, wenn λ über die Grenzstelle $2L+\lambda_i$ hinausrückt, in

ganz ähnlicher Weise seinen Charakter, wie es vorhin bei dem ersten Element der Fall war. Sondern wir aber auch diesen Bestandteil der Lösung ab, und beachten, daß das damit gebildete Kernintegral den Wert $\log \frac{1}{E_{i_0'' s}}$ hat, so folgt genau durch dieselben Überlegungen wie oben, daß die weiter modifizierte Gleichung

$$(37) \qquad \log \frac{1}{E_{is}} - \log \frac{1}{E_{i_0' s}} - \log \frac{1}{E_{i_0'' s}} = \int_0^{2\pi} \eta''(\alpha) \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\alpha$$

eine Lösung besitzt, sobald nur $\lambda < 4L - \lambda_i$ ist. Wir erhalten also den folgenden Satz:

Die ursprüngliche Gleichung ($\lambda > L$)

$$\log \frac{1}{E_{is}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\alpha$$

hat eine Lösung für $\lambda < 2L - \lambda_i$. Die modifizierte

$$(34) \qquad \log \frac{1}{E_{is}} - \log \frac{1}{E_{i_0' s}} = \int_0^{2\pi} \eta'(\alpha) \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\alpha$$

hat eine Lösung für $\lambda < 2L + \lambda_i$, und die weiter modifizierte Gleichung

$$(37) \qquad \log \frac{1}{E_{is}} - \log \frac{1}{E_{i_0' s}} - \log \frac{1}{E_{i_0'' s}} = \int_0^{2\pi} \eta''(\alpha) \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\alpha$$

in dem noch größeren Bereiche $\lambda < 4L - \lambda_i$; und so können wir beliebig fortfahren. Zu den modifizierten Gleichungen kommen wir, indem wir von der ursprünglichen Lösung (31) ein Element nach dem andern absondern und das damit (vor Erreichung der jeweiligen Grenzstelle) gebildete Kernintegral zu der Funktion auf der linken Seite schlagen. Die Lösungen von (34) und (37) sind demnach sofort aus (31) abzulesen.

Zusatz: Wie man sieht, handelt es sich bei diesen Modifikationen um die Abspaltung von Unstetigkeiten.

Wir wollen in dem folgenden Paragraphen nun sehen, was sich ergibt, wenn das, was wir hier an dem speziellen Beispiel der Ellipse durchgeführt haben, etwa allgemeiner gültig sein sollte.

§ 6. Kernintegralgleichungen mit nichtmultiplikativem Parameter und ein funktionentheoretisches Analogon.

Wir haben bisher zwei Integralgleichungen erster Art betrachtet. Dabei haben wir schon darauf aufmerksam gemacht, daß ihre Lösbarkeit dadurch ermöglicht wurde, daß der Kern außer von den beiden Variabeln auch noch von einem „nichtmultiplikativem" Parameter abhing. Nichtmultiplikativ nannten wir den Parameter, weil sich der Kern von ihm nicht durch Division mit einer Funktion des Parameters allein befreien ließ. Es ergab sich dann, daß die Gleichung sicher eine Lösung besaß, wenn der Parameter innerhalb eines gewissen Intervalles blieb; dieses Intervall nannten wir den „Lösungsbereich" der Gleichung. Außerdem zeichneten sich unsere Integralgleichungen dadurch aus, daß die freie Funktion grade wieder der Kern für einen speziellen Wert dieses Parameters war. Wir haben also Gleichungen von der allgemeinen Form

$$K(s, r; \lambda_1) = \int_a^b K(s, t; \lambda)\, \varphi(t, \lambda)\, dt \qquad \left(a \leqq \begin{matrix} s \\ r \end{matrix} \leqq b\right) \tag{38}$$

wenn wir in Anlehnung an das Ellipsenbeispiel den nichtmultiplikativen Parameter mit λ bezeichnen. Die Grenzen des Lösungsbereiches hingen von λ_1 ab. Näherte sich λ den Grenzen dieses Intervalles, so wurde die Lösung unstetig [1]). Das führte uns bei der Ellipse zur Bildung einer, mit der ursprünglichen nahe verwandten Integralgleichung, deren Lösung grade der Teil der ursprünglichen war, welcher beim Überschreiten des Lösungsbereiches stetig blieb.

Unsere nächste Aufgabe ist nun die Untersuchung, ob und inwieweit auch bei dem allgemeinen Typus (38) die obigen Verhältnisse erhalten bleiben. Bevor wir aber dazu übergehen, wollen wir nur noch darauf hinweisen, daß Integralgleichungen, deren Kern von einem nicht multiplikativen Parameter abhängt, in der Funktionentheorie recht häufig vorkommen. Das einfachste Beispiel dafür ist, wie wir zeigen wollen, die Cauchysche Integraldarstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}} \frac{1}{\xi - z} \cdot f(\xi)\, d\xi.$$

1) Es ist wohl nicht nötig, zu bemerken, daß die Lösung außer von t und λ auch noch von r und λ_1 abhängt.

Man sieht sofort, daß dies keine Kernintegralgleichung ist. (Eine solche ließe sich leicht mit Hilfe der Hadamardschen Transmutation aufstellen). Als Integrationskurve können wir stets einen Kreis wählen; dann enthält der Kern $\frac{1}{\zeta - z}$ den Radius des Integrationskreises als Parameter. Für diesen gibt es nun eine obere Grenze, nämlich den Radius des Kreises durch den nächsten singulären Punkt der Lösung $f(\zeta)$. Liegt hier eine polare Unstetigkeit vor, so können wir sie abspalten und die Integralgleichung so modifizieren, daß sie lösbar bleibt auch für größere Werte des Parameters. Es ist dies mutatis mutandis dasselbe, was wir oben bei dem Ellipsenbeispiel getan haben.

Wir kehren jetzt zu unseren Kernintegralgleichungen (38) zurück. Die Eigenwerte k_n und die Eigenfunktionen φ_n eines solchen Kernes mit nichtmultiplikativem Parameter sind (wie aus unsern ganzen früheren Darlegungen folgt und wie ja eigentlich selbstverständlich ist) definiert durch die homogene Integralgleichung zweiter Art:

$$\varphi_n(s) = k_n \int_a^b K(s, t; \lambda) \varphi_n(t)\, dt,$$

wobei λ zunächst festgehalten gedacht ist. Die (im allgemeinen abzählbar unendlich vielen) Werte k_n und die Funktionen φ_n, die dieser Gleichung genügen, werden im allgemeinen noch beide von dem gegebenen Parameterwert λ abhängen, sodaß wir schreiben können

$$k_n = k_n(\lambda) \text{ und } \varphi_n(t) = \varphi_n(t, \lambda).$$

In unsern Beispielen ging der Parameter nur ein in die Eigenwerte; die Eigenfunktionen waren unabhängig von ihm und infolgedessen auch die Fourierkoeffizienten der freien Funktion. Wir wollen uns nun auch weiterhin nur mit solchen Kernen beschäftigen, die diese Eigenschaft besitzen, da sich dann auch leicht hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingungen für die Existenz eines Lösungsbereiches angeben lassen. Wir machen diese Bemerkung, weil man leicht Kerne angeben kann, für welche die Gleichung (38) für kein zulässiges Wertepaar λ und λ_1 lösbar ist. Solche hinreichenden Bedingungen ergeben sich z. B., wenn man über das asymptotische Verhalten der $k_n(\lambda)$ gewisse Voraussetzungen macht, sodaß etwa für sehr große n gilt:

$$k_n(\lambda) \sim \lambda^n \mu(n), \text{ oder } k_n(\lambda) \sim \lambda^{-n} \mu(n)$$

$$\text{oder auch } k_n(\lambda) \sim n^{\lambda} \mu(n), \text{ oder } k_n(\lambda) \sim n^{-\lambda} \mu(n).$$

Dabei bedeutet $\mu(n)$ immer eine mit n monoton wachsende Funktion.

Haben wir nun das erste Ziel erreicht und ein Intervall, etwa

$$\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$$

festgestellt, in welchem die Gleichung (38) eine Lösung besitzt, so wird unser weiteres Bestreben sein, sie so zu modifizieren, daß sie auch noch für andere Parameterwerte lösbar ist. Bei unserm Ellipsenbeispiel gelang uns dies, weil wir infolge des bekannten Resultates die Lösung so darstellen konnten, daß ihre Unstetigkeiten sofort erkennbar waren. Im allgemeinen Falle aber kennen wir die Lösung gar nicht, haben sogar meist nicht einmal eine Darstellung für sie, sondern kennen nur ihre Fourierkoeffizienten. Wir wollen nun im nächsten Paragraphen auf unser Ellipsenbeispiel ein Verfahren zur Herleitung der modifizierten Gleichung anwenden, das nur die Kenntnis der Fourierkoeffizienten voraussetzt und auch im allgemeinen Falle oft zum Ziele führt.

§ 7. Nochmals die Lösung der Integralgleichung erster Art bei dem Ellipsenproblem.

In den Formeln (27) S. 25

$$(27)\quad \eta(\alpha) = \frac{c-L}{2\pi(c-\lambda)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{e^{n\lambda}(e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i})}{e^{nL}(e^{nL}+e^{-nL})}\cos n\vartheta_i\right)\cos n\alpha + \left(\frac{e^{n\lambda}(e^{n\lambda_i}-e^{-n\lambda_i})}{e^{nL}(e^{nL}-e^{-nL})}\sin n\vartheta_i\right)\sin n\alpha\right]$$

und (31) S. 27

$$(31)\quad \eta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\frac{c-L}{c-\lambda} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}\right.$$
$$+ \frac{e^{[2L+\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(2L+\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L+\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha+\vartheta_i) + e^{-[(2L+\lambda_i)-\lambda]}}$$
$$- \frac{e^{(4L-\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(4L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(4L-\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha+\vartheta_i) + e^{-[(4L-\lambda_i)-\lambda]}}$$
$$\left. - \frac{e^{(4L+\lambda_i)-\lambda} - e^{-[(4L+\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(4L+\lambda_i)-\lambda} - 2\cos(\alpha-\vartheta_i) + e^{-[(4L+\lambda_i)-\lambda]}} + \text{u. s. w.}\right]$$

haben wir zwei verschiedene Darstellungen der Lösung unserer Gleichung

$$\log \frac{1}{E_{is}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{\sigma s}} d\alpha$$

kennen gelernt. Die erste ist, da in diesem Beispiele die symbolische Gleichung

$$\eta(t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (k_n a_n) \varphi_n(t) \right]$$

eine wirkliche ist. die Darstellung, von der der Satz S. 11 spricht; zu der andern gelangten wir nur mit Hilfe der mehrfach erwähnten Resultate von E. R. Neumann. Diese zweite Darstellung setzte uns in den Stand, ja drängte uns förmlich dazu, von der Lösung einen solchen Teil $\eta_0(\alpha)$ abzusondern, daß die modifizierte Gleichung in einem größeren Bereiche lösbar war.

Jetzt wollen wir sehen, was wir von der Lösung in der Gestalt (27) absondern müssen, um zu derselben modifizierten Gleichung wie oben zu gelangen. Wir finden so eine Methode, die man dann, da die Darstellung (27) nur die Kenntnis der Fourierkoeffizienten benutzt, auch bei andern derartigen Integralgleichungen anwenden kann (womit aber noch nicht gesagt ist, daß sie immer zum Ziele führen muß). Wir gehen zunächst von den uns bekannten Resultaten aus und entwickeln den abgesonderten Teil in eine Reihe nach den Eigenfunktionen, hier also in eine gewöhnliche Fouriersche Reihe. Dieser Teil ist, abgesehen von einer additiven Konstanten, auf die es aber bei der Abspaltung offenbar nicht ankommt, gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^b - e^{-b}}{e^b - 2\cos(\alpha - \vartheta_i) + e^{-b}}, \text{ wo } b = (2L - \lambda_i) - \lambda > 0$$

ist. Dieser Ausdruck ist aber nichts andres als

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{db} \left\{ \log \left(e^b - 2\cos(\alpha - \vartheta_i) + e^{-b} \right) \right\}.$$

Nun ist

$$\log \left(e^b - 2\cos(\alpha - \vartheta_i) + e^{-b} \right) = b + \log \left(1 - 2e^{-b} \cos(\alpha - \vartheta_i) + e^{-2b} \right),$$

also nach bekannter Formel

$$= b - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-bn} \cos n(\alpha - \vartheta_i).$$

Wir dürfen diese Formel hier anwenden, da b positiv ist. Demnach erhalten wir

$$\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}-2\cos(\alpha-\vartheta_i)+e^{-b}} = \frac{d}{db}\left\{b-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\,e^{-bn}\cos n(\alpha-\vartheta_i)\right\}.$$

Die Reihe rechts aber dürfen wir als konvergente Potenzreihe von e^{-b} gliedweise differenzieren. Wir erhalten so, wenn wir dann noch für b wieder seinen Wert einsetzen, das Resultat:

Wir können den ersten Bruch der eckigen Klammer in (31), also den zuerst abgesonderten Teil der Lösung, in die Fouriersche Reihe entwickeln

$$(39)\quad \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda}-e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}{e^{(2L-\lambda_i)-\lambda}-2\cos(\alpha-\vartheta_i)+e^{-[(2L-\lambda_i)-\lambda]}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n[(2L-\lambda_i)-\lambda]}\cos n\vartheta_i)\cos n\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n[(2L-\lambda_i)-\lambda]}\sin n\vartheta_i)\sin n\alpha,$$

also in eine Reihe derselben Art, wie wir sie in (27) vor uns haben.

Wir wollen nun die Reihen (27) und (39) mit einander vergleichen. Den allgemeinen Koeffizienten der Eigenfunktionen in der Entwicklung (27) können wir auch in der Form schreiben

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{n\lambda}(e^{n\lambda_i}+e^{-n\lambda_i})}{e^{nL}(e^{nL}+e^{-nL})}\cos n\vartheta_i = \frac{1}{\pi}\,e^{-n[(2L-\lambda_i)-\lambda]}\cdot\frac{1+e^{-2n\lambda_i}}{1+e^{-2nL}}\cos n\vartheta_i$$

$$= h_n\cdot g_n\cos n\vartheta_i.$$

Dabei haben wir

$$h_n = \frac{1}{\pi}\,e^{-n[(2L-\lambda_i)-\lambda]}\quad\text{und}\quad g_n = \frac{1+e^{-2n\lambda_i}}{1+e^{-2nL}}$$

gesetzt. Entsprechendes gilt für den Koeffizienten von $\sin n\alpha$. Das g_n ist von dem Parameter λ unabhängig und nähert sich mit wachsendem n beliebig der Eins, also einer Konstanten. Das h_n dagegen gibt, in Verbindung mit $\cos n\vartheta_i$ bzw. $\sin n\vartheta_i$ den allgemeinen Koeffizienten der Entwicklung des abgespaltenen Teiles. Wir können daher die Ergebnisse des Ellipsenbeispieles auch in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Die Gleichung

$$\log \frac{1}{E_{is}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{os}} \, d\alpha$$

besitzt in dem Bereiche $L < \lambda < 2L - \lambda_i$ die Lösung

$$(40) \quad \eta(\alpha) = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n g_n \cos n\vartheta_i \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \bar{g}_n \sin n\vartheta_i \sin n\alpha.$$

Dabei ist

$$h_n = \frac{1}{\pi} e^{-n[(2L-\lambda_i)-\lambda]}, \quad g_n = \frac{1+e^{-2n\lambda_i}}{1+e^{-2nL}}, \quad \bar{g}_n = \frac{1-e^{-2n\lambda_i}}{1-e^{-2nL}}$$

gesetzt. Hier ist wesentlich, daß g_n und $\bar{g}_n$ von λ unabhängig sind und sich mit wachsendem n der Eins nähern. Der abgespaltene Teil ist dann gegeben durch

$$(41) \quad \eta_0(\alpha) = \text{const} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos n\vartheta_i \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin n\vartheta_i \sin n\alpha.$$

§ 8. Betrachtungen an allgemeineren Kernintegralgleichungen erster Art.

Wir kehren jetzt zu unsern Kernintegralgleichungen der Form

$$(38) \quad K(s,r;\lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\, \eta(t,\lambda)\, dt$$

zurück und suchen das Verfahren des letzten Paragraphen auf sie anzuwenden. Über den Kern wollen wir die S. 33 eingeführte Annahme machen, daß der Parameter λ nur in die Eigenwerte k_n des Kernes eingeht und die Eigenfunktionen φ_n unbeeinflußt läßt. Von dieser Art waren ja auch die Kerne in unsern beiden Beispielen.

Die Fourierkoeffizienten des Kernes, der jetzt an Stelle der freien Funktion tritt, sind gegeben durch

$$a_n = \frac{\varphi_n(r)}{k_n(\lambda_1)},$$

wie aus (4) S. 8 leicht folgt, sodaß wir also in unserer Symbolik (vgl. S. 10) schreiben können

$$K(s,r;\lambda_1) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_n(r)}{k_n(\lambda_1)}\right)\varphi_n(s)\right]. \tag{42}$$

Die Fourierkoeffizienten der Lösung $\eta(t,\lambda)$ sind dann

$$k_n(\lambda)\cdot a_n = k_n(\lambda)\cdot\frac{\varphi_n(r)}{k_n(\lambda_1)},$$

und daher ist nach dem Satz S. 11 die Lösung der Integralgleichung (38) bestimmt durch die symbolische Gleichung

$$\eta(t,\lambda) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)}\varphi_n(r)\right)\varphi_n(t)\right], \tag{43}$$

vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion mit den Fourierkoeffizienten $k_n(\lambda)a_n$ überhaupt gibt, d. h. daß die Reihe $\sum k_n^2(\lambda)a_n^2$ konvergiert. Dies wollen wir für ein gewisses Intervall $\Lambda_1 \ldots \Lambda_2$ von λ voraussetzen[1]). Das mit $\eta(t,\lambda)$ gebildete Kernintegral

$$\mathfrak{K} = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta(t,\lambda)\,dt$$

ist stets, wie es sein muß, von λ unabhängig; denn die Fourierkoeffizienten von $\mathfrak{K}$ sind

$$\int_a^b \mathfrak{K}\varphi_n(s)\,ds = \frac{1}{k_n(\lambda)}\int_a^b \varphi_n(t)\,\eta(t,\lambda)\,dt = \frac{1}{k_n(\lambda)}\cdot\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)}\varphi_n(r) = \frac{\varphi_n(r)}{k_n(\lambda_1)}.$$

Dasselbe gilt dann natürlich auch von $\mathfrak{K}$ selber.

Wir wollen nun annehmen, die Fourierkoeffizienten der Lösung ließen sich in der Form

$$\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)}\varphi_n(r) = h_n(\lambda)\,g_n\,\varphi_n(r) \tag{44}$$

darstellen, unter den g_n eine von dem Parameter λ unabhängige gegen Eins konvergierende Zahlenfolge verstanden. Ist das der Fall, so spalten wir von der Funktion mit diesen Fourierkoeffi-

1) Der Lösungsbereich braucht im allgemeinen nicht aus einem einzigen kontinuierlichen Intervall zu bestehen, doch wollen wir uns der Einfachheit halber auf diesen Fall beschränken.

zienten $h_n g_n \varphi_n(r)$ die mit den Fourierkoeffizienten $h_n \varphi_n(r)$ ab und schreiben also [1])

$$(43') \quad \eta(t,\lambda) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n \varphi_n(r)\} \varphi_n(t)\Big] + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n (g_n - 1)\varphi_n(r)\} \varphi_n(t)\Big].$$

Eine Funktion mit den Fourierkoeffizienten $h_n \varphi_n(r)$

$$(45) \quad \eta_0(t,\lambda) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} (h_n \varphi_n(r)) \varphi_n(t)\Big]$$

existiert sicher in demselben Intervalle wie $\eta(t,\lambda)$, in unserm Falle also für $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, da die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (h_n \varphi_n(r))^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \varphi_n(r))^2 g_n^2$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren; und die Konvergenz dieser Reihen ist nach S. 10 die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Funktionen mit den Fourierkoeffizienten $h_n \varphi_n(r)$ bzw. $h_n \varphi_n(r) g_n$.

Was nun das zweite Glied in (43') anlangt, so ist einleuchtend, daß die Funktion mit den Fourierkoeffizienten $h_n(g_n - 1)\varphi_n(r)$ sehr oft in einem größeren Intervalle existiert; denn die hierfür notwendige und hinreichende Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 (g_n - 1)^2 \varphi_n^2(r)$$

findet wegen des zur Null abnehmenden Faktors $(g_n - 1)^2$ möglicherweise in einem größeren Bereiche statt. Wir würden also jetzt, im Besitze der Darstellung (43') der Lösung, auch ohne uns an unser Ellipsenbeispiel zu halten, den Versuch machen, die Gleichung (38) so zu modifizieren, daß die Lösung dann durch

$$(46) \quad \eta'(t,\lambda) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n (g_n - 1)\varphi_n(r)\} \varphi_n(t)\Big]$$

gegeben ist. Zu dieser Modifikation aber gelangen wir sofort, indem wir das mit dem abgesonderten Teile $\eta_0(t,\lambda)$ gebildete Kernintegral

$$(47) \quad \int_a^b K(s,t;\lambda)\, \eta_0(t,\lambda)\, dt = f_0(s)$$

1) Es gilt ja bekanntlich der Satz, daß die Fourierkoeffizienten einer endlichen Summe von Funktionen gleich der Summe der Fourierkoeffizienten der Summanden sind.

in (38) zu der Funktion auf der linken Seite schlagen. Wir erhalten so die modifizierte Gleichung

$$K(s,r;\lambda_1)-f_0(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta'(t,\lambda)\,dt, \tag{48}$$

deren Lösung für $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ sicher existiert und durch (46) gegeben ist. $f_0(s)$ ist tatsächlich von λ unabhängig; denn es läßt sich durch Einsetzen in der bekannten Weise leicht zeigen, daß seine Fourierkoeffizienten sämtlich von λ unabhängig sind.

Aus den Überlegungen S. 11 folgt, daß wir mit der symbolischen Darstellung der Lösung (vgl. (43) und (46)) auch sogleich die zugehörige Picardsche Reihe haben. Zu unsern Gleichungen (38) und (48) gehören demnach die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(k_n a_n)^2 \varphi_n^2(r) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(k_n a_n')^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(k_n(g_n-1))^2 \varphi_n^2(r).$$

Bilden wir in der letzten Reihe den Quotienten zweier aufeinander folgenden Glieder, so erhalten wir

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left(\frac{h_{n+1}\varphi_{n+1}(r)}{h_n\varphi_n(r)}\right)^2\left(\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1}\right)^2.$$

Der erste Faktor bleibt nach dem auf S. 38 Gesagtem $\leqq 1$ für „fast alle“[1]) n, wenn $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ ist. Beim zweiten Faktor setzen wir

$$\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1} = q_n.$$

Würden wir nun noch die nicht sehr einschränkende Voraussetzung machen, daß die Annäherung von g_n gegen 1 nicht in dauernden Schwankungen erfolgen soll, sondern schließlich von unten her monoton wird, so sind (wenigstens von einer gewissen Stelle an) alle diese Größen q_n echte Brüche.

Damit ist aber noch nicht gesagt, daß die zweite Reihe (49) wirklich in einem größeren Bereiche konvergiert: denn es könnte ja z. B. sein, daß q_n sich mit wachsendem n beliebig der Eins nähert. Damit wir eine Erweiterung des Intervalles erhalten, ist es also jedenfalls notwendig, daß es eine Zahl $\Theta < 1$ gibt, derart, daß für eine unbegrenzte Folge von Werten n die Beziehung gilt:

$$q_n \leqq \Theta < 1.$$

1) Terminologie von Kowalewski.

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann es sein, daß die modifizierte Gleichung (48) in einem größeren Bereiche, etwa für

$$\Lambda_1' < \lambda < \Lambda_2'$$

eine Lösung hat. Mit der durch (46) gegebenen Lösung von (48) können wir dann wieder ebenso verfahren und

$$h_n(g_n - 1) = h_n' \cdot g_n'$$

setzen: g_n' soll genau wie g_n von λ unabhängig sein und sich mit wachsendem n der Eins nähern. Wir zerspalten dann (46) nach dem Vorgange von (43′) in folgender Weise

$$(46') \quad \eta'(t,\lambda) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n' \varphi_n(r)\}\, \varphi_n(t)\Big] + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n'(g_n' - 1)\varphi_n(r)\}\, \varphi_n(t)\Big].$$

Das Kernintegral der ersten Funktion rechts, die wir mit $\eta_1(t,\lambda)$ bezeichnen wollen, also den Ausdruck

$$(47') \qquad \int_a^b K(s,t;\lambda)\, \eta_1(t,\lambda)\, dt = f_1(s)$$

schlagen wir wiederum zu der Funktion auf der andern Seite; wir erhalten so die folgende, noch weiter modifizierte Gleichung

$$(48') \qquad K(s,r;\lambda_1) - f_0(s) - f_1(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\, \eta''(t,\lambda)\, dt.$$

Im Intervall $\Lambda_1' < \lambda < \Lambda_2'$ ist $\eta''(t,\lambda)$ sicher gegeben durch

$$(50) \qquad \eta''(t,\lambda) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \{h_n'(g_n' - 1)\varphi_n(r)\}\, \varphi_n(t)\Big].$$

Möglicherweise aber hat diese Gleichung auch noch in einem größeren Bereiche eine Lösung, und dann können wir in derselben Weise versuchen, weiterzugehen. Diese Ergebnisse können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Gegeben sei die Integralgleichung

$$(38) \qquad K(s,r;\lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\, \eta(t,\lambda)\, dt.$$

Wir machen über den Kern die Annahme, daß nur seine Eigenwerte von λ abhängen (nicht auch die Eigenfunktionen), die Grenzen des Lösbarkeitsintervalles seien

$$\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2.$$

Die Lösung selber ist dann bestimmt durch die symbolische Gleichung

$$\eta(t,\lambda) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)}\varphi_n(r)\right)\varphi_n(t)\right]. \tag{43}$$

Wir nehmen nun an, es sei

$$\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)} = h_n(\lambda)\,g_n$$

und g_n von λ unabhängig und im $\lim_{n=\infty}$ gleich 1. Dann zerlegen wir die Lösung in folgender Weise:

$$\eta(t,\lambda) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\{h_n\varphi_n(r)\}\,\varphi_n(t)\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty}\{h_n(g_n-1)\varphi_n(r)\}\,\varphi_n(t)\right] = \eta_0(t,\lambda)+\eta'(t,\lambda). \tag{43'}$$

Das mit $\eta_0(t,\lambda)$ gebildete Kernintegral

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta_0(t,\lambda)\,dt = f_0(s) \tag{47}$$

ist von dem Parameter λ unabhängig. Betrachten wir nun die modifizierte Gleichung

$$K(s,r;\lambda_1) - f_0(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta'(t,\lambda)\,dt, \tag{48}$$

so hat diese unter Umständen in einem größeren Bereiche eine Lösung; dazu ist sicher notwendig (aber nicht hinreichend), daß die g_n noch die weitere Bedingung erfüllen

$$\left|\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1}\right| = q_n \leqq \Theta < 1 \tag{51}$$

(wenigstens für eine unbegrenzte Folge von Wertən n). Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die modifizierte Gleichung läßt sich dann möglicherweise der Lösungsbereich abermals erweitern.

Wir wollen kurz zeigen, daß beim Ellipsenbeispiel unsere Bedingung (51) wirklich erfüllt ist. Dort war

$$f_0(s) = \log\frac{1}{E_{i_0's}}.$$

Ferner ist nach S. 37

$$g_n = \frac{1+e^{-2n\lambda_i}}{1+e^{-2nL}}, \qquad \bar{g}_n = \frac{1-e^{-2n\lambda_i}}{1-e^{-2nL}}$$

und daraus folgt

$$\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1} = \frac{e^{-2(n+1)\lambda_i}-e^{-2(n+1)L}}{(e^{-2n\lambda_i}-e^{-2nL})(1+e^{-2(n+1)L})}\,(1+e^{-2nL}) \sim e^{-2\lambda_i} < 1.$$

Der Quotient nähert sich also mit wachsendem n beliebig einem Werte, welcher wirklich kleiner als Eins ist. — Auch für die mögliche Wiederholung der Abspaltung liefert das Ellipsenproblem ein gutes Beispiel.

Daß man immer $\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)}$ in die Form $h_n g_n$ mit den verlangten Eigenschaften der g_n versetzen kann, ist trivial; denn bilden die g_n eine solche konvergente Zahlenfolge mit der Grenze 1, so brauchen wir nur

$$h_n = \frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)\,g_n}$$

zu setzen. Im allgemeinen werden aber dann die g_n in gar keiner Beziehung zu dem Kern stehen; sie werden einen fremdartigen Bestandteil bilden. Um also unser Verfahren mit Nutzen anwenden zu können, müssen wir noch besondere Gesichtspunkte walten lassen. Das war auch bei unserm Ellipsenbeispiel der Fall, wo die Funktion $f_0(s)$ wieder der Kern selber ist, nur für einen andern Parameterwert λ, nämlich für $\lambda = \Lambda_1 = 2L - \lambda_1$, welches das ursprüngliche Lösbarkeitsintervall begrenzt. Nach diesem Gesichtspunkt kann man auch sonst oft verfahren, wenn die Eigenwerte die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n(\Lambda_1)}{k_n(\lambda_1)} = 1 \text{ und } \left| \frac{\dfrac{k_{n+1}(\Lambda_1)}{k_{n+1}(\lambda_1)} - 1}{\dfrac{k_n(\Lambda)}{k_n(\lambda_1)} - 1} \right| \leqq \Theta < 1 \qquad \text{(für fast alle } n\text{)}.$$

Denn dann können wir so umformen:

$$\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)} = \left(\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\Lambda_1)}\right)\left(\frac{k_n(\Lambda_1)}{k_n(\lambda_1)}\right) = h_n \cdot g_n$$

und erhalten für $f_0(s)$ den Wert

$$f_0(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta_0(t,\lambda)\,dt = \int_a^b K(s,t;\lambda)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\Lambda_1)}\,\varphi_n(r)\right\}\varphi_n(t)\right]dt.$$

Die Fourierkoeffizienten von $f_0(s)$ ergeben sich dann in der bekannten Weise (vgl. S. 38) zu

$$\int_a^b f_0(s)\,\varphi_n(s)\,ds = \frac{\varphi_n(r)}{k_n(\Lambda_1)}$$

also genau dieselben wie die von $K(s,r;\Lambda_1)$, woraus

$$f_0(s) = K(s,r;\Lambda_1)$$

folgt. Die Lösung der modifizierten Gleichung

$$K(s,r;\lambda_1) - K(s,r;\Lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,\eta'(t,\lambda)\,dt$$

ist dann gegeben durch die symbolische Gleichung

$$\eta'(t,\lambda) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{h_n(g_n-1)\,\varphi_n(r)\right\}\varphi_n(t)\right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\Lambda_1)}\left(\frac{k_n(\Lambda_1)}{k_n(\lambda_1)}-1\right)\varphi_n(r)\right\}\varphi_n(t)\right]$$

und da nach unserer Voraussetzung (von einer bestimmten Stelle an)

$$\left|\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1}\right| = \left|\frac{\frac{k_{n+1}(\Lambda_1)}{k_{n+1}(\lambda_1)}-1}{\frac{k_n(\Lambda_1)}{k_n(\lambda_1)}-1}\right| \leqq \Theta < 1$$

ist, so ist die Vorbedingung für den Erfolg unseres Verfahrens erfüllt.

Ein zweiter Weg wäre z. B. dieser: Genügen die Eigenwerte nur der Bedingung

$$\frac{k_n^2(\lambda_1)}{k_{n+1}^2(\lambda_1)} \leqq \Theta < 1 \qquad \text{(für fast alle } n\text{)},$$

so schreiben wir den in Frage kommenden Koeffizienten in der Form

$$\frac{k_n(\lambda)}{k_n(\lambda_1)} = \left(\frac{k_n(\lambda)\,k_n(\lambda_1)}{1+k_n^2(\lambda_1)}\right)\left(\frac{1+k_n^2(\lambda_1)}{k_n^2(\lambda_1)}\right) = h_n\cdot g_n.$$

Dann ist $f_0(s)$ bestimmt durch

$$f_0(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{k_n(\lambda_1)}{1+k_n^2(\lambda_1)}\,\varphi_n(r)\right\}\varphi_n(s)\right.$$

und auch hier ist, wie leicht zu sehen, die Bedingung für die Anwendbarkeit des Verfahrens erfüllt.

In anderen Fällen, wie etwa in dem Beispiel des nächsten Paragraphen, ergeben sich unmittelbar aus der Rechnung, ohne daß

man zuvor eine Erweiterung vorzunehmen braucht, solche abzuspaltenden Faktoren, die allen an ϱ_n zu stellenden Bedingungen genügen.

Wie wir also bei der Abspaltung im Einzelnen vorzugehen haben, wird wesentlich von der Natur der vorgelegten Gleichung abhängen und auch von dem Zusammenhang, in welchem wir sie betrachten. So war es z. B. bei der Gleichung in unserm Ellipsenproblem sehr wichtig, daß wir die Abspaltung unter dem erstgenannten Gesichtspunkt vornehmen konnten; denn infolgedessen waren die Funktionen $f_0(s)$, $f_1(s)$, ... wieder der Kern selber (nur für andere Parameterwerte), d. h. der Logarithmus einer reziproken Entfernung; und wir konnten sie daher deuten als Potentiale gewisser Punkte.

Diese verschiedene Möglichkeit der Modifikation der Integralgleichung erinnert sehr an die verschiedenen Arten der Mittag-Lefflerschen Partialbruchzerlegung, wo man auch bei der Abspaltung der unstetigen Glieder bezüglich der Zusatzfunktionen in weitem Maße willkürlich verfahren kann.

§ 9. Anwendung des auseinandergesetzten Verfahrens auf ein Beispiel.

Wir wollen die Betrachtungen des vorigen Paragraphen auf ein neues Beispiel anwenden, das in mancher Beziehung anders geartet ist, als die Integralgleichung für die Ellipse. Wir betrachten den Kern

$$K(s,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2^n}}{1-\lambda^{2^{n+1}}} \frac{\cos ns}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}. \tag{52}$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2^n}}{1-\lambda^{2^{n+1}}}$$

konvergiert[1]) (und zwar absolut, da alle Glieder für $|\lambda| < 1$ positiv, für $|\lambda| > 1$ negativ sind), so ist dieser Kern für alle endlichen λ außer für $|\lambda| = 1$ definiert durch eine in s und t gleichmäßig konvergente Reihe.

In den früheren Beispielen war der Kern immer der Logarithmus der reziproken Entfernung, also eine analytische Funktion in

1) Vgl. Nielsen, Lehrbuch der unendlichen Reihen S. 86.

s, t und λ, während der vorliegende Kern, wenn er überhaupt von λ analytisch abhängt, zum mindesten zwei verschiedene Funktionen darstellt für $|\lambda| < 1$ und $|\lambda| > 1$, wie aus der Diskontinuität der obigen Reihe (vgl. Nielsen a. a. O.) beim Übergang von Werten < 1 zu solchen > 1 hervorgeht.

Wir wollen nun die Gleichung

$$(53) \qquad K(s,r;\lambda_1) = \int_0^{2\pi} K(s,t;\lambda)\,\eta(t,\lambda)\,dt \qquad (|\lambda| \neq 1)$$

unter der Voraussetzung $|\lambda_1| < 1$ untersuchen. Unsere erste Aufgabe ist die Bestimmung des Lösungsbereiches. Aus der Darstellung (52) des Kernes folgt, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kernes gegeben sind durch

$$(54) \qquad k_n(\lambda) = \frac{1-\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}} \text{ und } \varphi_n(s) = \frac{\cos ns}{\sqrt{\pi}}.$$

Da die freie Funktion hier wieder der Kern für den Parameter λ_1 ist, so findet man für die Fourierkoeffizienten ohne weiteres

$$(54') \qquad a_n = \frac{\lambda_1^{2^n}}{1-\lambda_1^{2^{n+1}}} \frac{\cos nr}{\sqrt{\pi}}.$$

Demnach ist die zu (53) gehörende Picardsche Reihe

$$(55) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 a_n^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1^{2^n}}{1-\lambda^{2^{n+1}}}\right)^2 \cos^2 nr$$
$$\leqq \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1^{2^n}}{1-\lambda_1^{2^{n+1}}}\right)^2.$$

Die Konvergenzgrenzen dieser Reihe bestimmen die Grenzen des Lösbarkeitsbereiches der Integralgleichung (53). Zunächst wollen wir die obere Grenze für λ bestimmen und nehmen $|\lambda| > 1$ an. Das allgemeine Glied v_n der Picardschen Reihe wird dann für sehr großes n

$$v_n \sim (\lambda\lambda_1)^{2^{n+1}}$$

Denn wir können im Zähler des ersten Faktors die Eins, im Nenner des zweiten $\lambda_1^{2^{n+1}}$ vernachlässigen gegenüber den danebenstehenden Summanden. Daher ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder asymptotisch gleich

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \sim (\lambda\lambda_1)^{2^{n+1}}.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als Eins sobald

$$1 < |\lambda| < \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$$

ist. Eine Lösung existiert also sicher, wenn diese Bedingung erfüllt ist; doch damit ist noch nicht der vollständige Lösungsbereich ermittelt; wir müssen noch die Werte $|\lambda| < 1$ betrachten. Für diese ist asymptotisch

$$v_n \sim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{2^{n+1}}$$

und demnach der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{2^{n+1}}$$

und dieser Ausdruck ist für $|\lambda| > |\lambda_1|$ kleiner als Eins. Damit haben wir den vollständigen Lösungsbereich gefunden. Diese Resultate können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Die Gleichung

$$K(s,r;\lambda_1) = \int_0^{2\pi} K(s,t;\lambda)\,\eta(t,\lambda)\,dt, \tag{53}$$

deren Kern (außer für $|\lambda| = 1$) durch die stets konvergente Entwicklung

$$K(s,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2^n}}{1-\lambda^{2^{n+1}}} \frac{\cos ns}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \tag{52}$$

gegeben ist, hat, wenn wir $|\lambda_1| < 1$ voraussetzen, eine Lösung, sobald

$$|\lambda_1| < \lambda < \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \qquad \text{(ausgenommen } |\lambda_1| = 1\text{)}$$

Die Lösung der Gleichung (53) ist nach der schon mehrfach angewandten allgemeinen Formel (vgl. S. 38) bestimmt durch

$$\eta(t,\lambda) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1-\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}} \cdot \frac{\lambda_1^{2^n}}{1-\lambda_1^{2^{n+1}}} \frac{\cos nr}{\sqrt{\pi}}\right\} \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right].$$

Diese symbolische Gleichung aber ist hier eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne; denn die Reihe rechts konvergiert, wie leicht ersichtlich, für die zulässigen λ gleichmäßig. Wir können daher schreiben

$$(56) \qquad \eta(t,\lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\lambda^{2n+1}}{\lambda^{2n}}\cdot\frac{\lambda_1^{2n}}{1-\lambda_1^{2n+1}}\cos nr\cos nt.$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun die Erweiterung des Lösbarkeitsbereiches durch Modifikation der Gleichung in dem früheren Sinne; dies wird uns mit Hilfe der im früheren Paragraphen erörterten Methode leicht und einfach gelingen, und zwar liegt hier, wie S. 44 schon angedeutet, ein solcher Fall vor, in dem eine Art der Abspaltung sich uns durch die Rechnung selbst als die naturgemäße aufdrängt. Nach dem allgemeinen Verfahren müssen wir den Ausdruck

$$\frac{1-\lambda^{2n+1}}{\lambda^{2n}}\cdot\frac{\lambda_1^{2n}}{1-\lambda_1^{2n+1}}$$

in zwei Faktoren h_n und g_n so zerlegen, daß die g_n monoton gegen 1 konvergierende Zahlen sind. Das ist aber erfüllt, wenn wir

$$h_n = \frac{(1-\lambda^{2n+1})\lambda_1^{2n}}{\lambda^{2n}} \quad \text{und} \quad g_n = \frac{1}{1-\lambda_1^{2n+1}}$$

setzen; denn die g_n bilden dann eine monoton gegen Eins abnehmende Zahlenfolge.

Wir können jetzt die Lösung (56) in der Form

$$\eta(t,\lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos nr\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(g_n-1)\cos nr\cos nt$$

schreiben und setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos nr\cos nt = \eta_0(t,\lambda).$$

Dieses $\eta_0(t,\lambda)$ ist der von der Lösung abzuspaltende Teil. Das mit ihm gebildete Kernintegral

$$\int_0^{2\pi} K(s,t;\lambda)\,\eta_0(t,\lambda)\,dt = f_0(s)$$

muß, wie wir allgemein festgestellt haben, von dem Parameter λ unabhängig sein; das sehen wir hier bestätigt; denn die von λ abhängigen Faktoren heben sich in h_n und dem entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung (52) gegenseitig fort, und so ergibt sich

$$f_0(s) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^{2n}\cos nr\cos ns.$$

Die modifizierte Gleichung ist nun

$$K(s,r;\lambda_1)-f_0(s)=\int_0^{2\pi}K(s,t;\lambda)\,\eta'(t,\lambda)\,dt. \tag{57}$$

Sie hat sicher eine Lösung in dem ursprünglichen Lösbarkeitsbereiche, aber sie ist, wie wir jetzt zeigen werden, in noch weiterem Umfange lösbar. Die hierfür als notwendig erkannte Bedingung

$$\left|\frac{g_{n-1}-1}{g_n-1}\right|\leqq\vartheta<1$$

ist tatsächlich erfüllt; denn es ist

$$\left|\frac{g_{n+1}-1}{g_n-1}\right|=\frac{\lambda_1^{2^{n+2}}\left(1-\lambda_1^{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\lambda_1^{2^{n+2}}\right)\lambda_1^{2^{n+1}}}<\lambda_1^{2^{n+1}}<|\lambda_1|<1.$$

Auch die neuen Lösbarkeitsgrenzen können wir nun leicht bestimmen. Die Lösung $\eta'(t,\lambda)$ von (57) ist

$$\begin{aligned}\eta'(t,\lambda)&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}h_n(g_n-1)\cos nr\cos nt\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\lambda^{2^{n+1}}\right)\lambda_1^{2^n}}{\lambda^{2^n}}\cdot\frac{\lambda_1^{2^{n+1}}}{1-\lambda_1^{2^{n+1}}}\cos nr\cos nt\end{aligned} \tag{56'}$$

und damit haben wir auch sofort die zugehörige Picardsche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}k_n^2a_n^2=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}}\right)^2\left(\frac{\lambda_1^{2^{n+1}}}{1-\lambda_1^{2^{n+1}}}\right)^2\cos^2 nr. \tag{55'}$$

Durch genau dieselben Überlegungen wie oben finden wir, daß die Lösung der modifizierten Gleichung sogar in dem vergrößerten Bereiche

$$|\lambda_1^2|<\lambda<\frac{1}{|\lambda_1^2|}\qquad(\text{ausgenommen }|\lambda|=1)$$

existiert. Wir können jetzt die Gleichung 57) nach demselben Verfahren weiter modifizieren, und zwar kommt man wieder mit genau denselben g_n aus, sogar bei allen weiteren Modifikationen. Nach m Schritten erhalten wir so als Lösungsbereich

$$|\lambda_1^{2m+1}|<\lambda<\frac{1}{|\lambda_1^{2m+1}|}\qquad(\text{ausgenommen }|\lambda|=1).$$

Die $m$te modifizierte Gleichung hat die Gestalt

$$K(s,r;\lambda_1)-f_0(s)-f_1(s)-\cdots-f_{m-1}(s)=\int_0^{2\pi}K(s,t;\lambda)\,\eta^{(m)}(t,\lambda)\,dt.$$

Dabei ist allgemein

$$f_k(s)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(2k+1)2^n}\cos nr\cos ns.$$

Wir können unsere Resultate so zusammenfassen:

Die Kernintegralgleichung (53) läßt sich in der obigen Weise durch eine endliche Zahl von Schritten so modifizieren, daß sie in jedem endlichen abgeschlossenen Bereich von λ, der die drei Zahlen -1, 0, $+1$ nicht enthält, eine Lösung besitzt.

§ 10. Über einen gewissen Zusammenhang der bisher betrachteten Kernintegralgleichungen mit allgemeinen Integralgleichungen erster Art.

Bisher haben wir uns nur mit dem folgenden Typus von Gleichungen beschäftigt:

$$K(s,r;\lambda_1)=\int_a^b K(s,t;\lambda_0)\,\eta(t,r;\lambda_0)\,dt. \tag{58}$$

Daß aber die genaue Kenntnis dieser Gleichungen auch bei der Behandlung allgemeinerer Integralgleichungen von Nutzen ist, wollen wir im Folgenden zeigen [1]).

Es sei gegeben die Gleichung

$$f(s)=\int_a^b K(s,r;\lambda)\,H(r,\lambda)\,dr. \tag{59}$$

Wir nehmen an, sie sei lösbar für einen bestimmten Parameterwert λ_1. Wir wollen nun versuchen, mit Hilfe der obigen Kernintegralgleichung (58) aus dieser Lösung $H(r,\lambda_1)$ noch neue, für andere Parameterwerte, herzuleiten.

Bei (58) wird unter Umständen für dieses bestimmte λ_1 ein gewisses Intervall von λ_0, etwa $\Lambda_1<\lambda_0<\Lambda_2$ existieren, für welches (58) lösbar ist. Setzen wir nun in (59) $\lambda=\lambda_1$ und für $K(s,r;\lambda_1)$ seinen Wert (58) ein, so ergibt sich

1) Weil es hier auch auf die Abhängigkeit der Lösung von r ankommt, wollen wir im Folgenden stets $\eta(t,r;\lambda_0)$ schreiben, statt wie bisher einfach $\eta(t,\lambda_0)$.

$$f(s) = \int_a^b \int_a^b K(s,t;\lambda_0)\,\eta(t,r;\lambda_0)\,H(r,\lambda_1)\,dr\,dt$$

oder, etwas anders angeordnet,

$$f(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda_0)\left\{\int_a^b \eta(t,r;\lambda_0)\,H(r,\lambda_1)\,dr\right\}dt.$$

Setzen wir nun

$$\int_a^b \eta(t,r;\lambda_0)\,H(r,\lambda_1)\,dr = H(t,\lambda_0)$$

so sehen wir, daß dies die Lösung der Gleichung (59) für $\lambda = \lambda_0$ ist. Wir erhalten also den folgenden Satz, welcher an das Verfahren mit der lösenden Funktion bei den Integralgleichungen zweiter Art erinnert.

Die Integralgleichung erster Art

$$f(s) = \int_a^b K(s,t;\lambda)\,H(t,\lambda)\,dt \tag{59}$$

besitze eine Lösung für den speziellen Parameterwert $\lambda = \lambda_1$. Das Intervall von λ_0, für welches die mit diesem λ_1 gebildete Kernintegralgleichung

$$K(s,r;\lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda_0)\,\eta(t,r;\lambda_0)\,dt \tag{58}$$

eine Lösung besitzt, sei $\Lambda_1 \leqq \lambda_0 \leqq \Lambda_2$. Dann hat auch (59) in demselben Intervall des Parameters eine Lösung, und diese ist

$$H(t,\lambda_0) = \int_a^b \eta(t,r;\lambda_0)\,H(r,\lambda_1)\,dr. \tag{60}$$

Eine einfache Folgerung aus diesem Resultate ist die, daß die beiden Gleichungen

$$K(s,r;\lambda_0) = \int_a^b K(s,t;\lambda_1)\,\eta(t,\lambda_1)\,dt$$

und

$$K(s,r;\lambda_1) = \int_a^b K(s,t;\lambda_0)\,\eta(t,\lambda_0)\,dt$$

einander im allgemeinen ausschließen, d. h. nicht beide gleichzeitig eine Lösung besitzen können; denn nehmen wir an, sie ließen sich beide gleichzeitig lösen, so müßte nach dem obigen Satze auch die

Gleichung

$$K(s, r; \lambda_0) = \int_a^b K(s, t; \lambda_0)\, \eta(t, \lambda_0)\, dt$$

lösbar sein, und das ist nicht der Fall, da die zugehörige Picardsche Reihe lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(r).$$

Denn die Fourierkoeffizienten von $K(s, r; \lambda_0)$ sind $\frac{\varphi_n(r)}{k_n(\lambda_0)}$ (vgl. S. 38). Diese Reihe aber divergiert im allgemeinen, jedenfalls immer dann, wenn das System der φ_n geschlossen ist [1]).

Die Gleichung

$$K(s, r; \lambda_0) = \int_a^b K(s, t; \lambda)\, \eta(t, \lambda)\, dt$$

kann demnach nicht für jedes endliche λ eine Lösung haben.

---

1) Vgl. E. Hellinger, Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Crellesches Journal Bd. 136, daselbst § 3.

Anhang.

1. Einige Ergänzungen zu dem Beispiel der Ellipse.

Bei unsern ersten Beispielen handelte es sich zunächst um eine Darstellung der Greenschen Funktion des Innengebietes. Beim Kreise ergab sich die analoge Behandlung der Greenschen Funktion des Außengebietes sofort mit. Bei der Ellipse aber liegen die Verhältnisse etwas anders, und deshalb wollen wir hier noch einige Worte über diesen Fall sagen.

Es handelt sich jetzt darum, eine Ellipse (λ) so zu belegen, daß ihr Potential auf der Grundellipse (L) allenthalben den Wert $\log \frac{1}{E_{as}}$, unter a einen außerhalb (L) gelegenen Punkt verstanden, besitzt. Wir erhalten so die Gleichung

$$\log \frac{1}{E_{as}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{os}} d\alpha.$$

Die Eigenfunktionen sind wieder

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos n\vartheta}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin n\vartheta}{\sqrt{\pi}},$$

während die Eigenwerte, je nachdem die Belegungsellipse die Grundellipse einschließt oder von ihr eingeschlossen wird, sind;

$$k_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c-\lambda} \qquad k_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c-L}$$

$$k_{n1} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}+e^{-nL}} \quad \text{oder} \quad k_{n1} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}$$

$$k_{n2} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{n\lambda}}{e^{nL}-e^{-nL}} \qquad k_{n2} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda}-e^{-n\lambda}}.$$

Da für die Funktion linker Hand die Entwicklung gilt

$$\log \frac{1}{E_{as}} = (c - \lambda_a)$$

$$+\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n} \frac{e^{nL} + e^{-nL}}{e^{n\lambda_a}} \frac{\cos n\vartheta_a}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\cos n\vartheta}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{n} \frac{e^{nL} - e^{-nL}}{e^{n\lambda_a}} \frac{\sin n\vartheta_a}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin n\vartheta}{\sqrt{\pi}} \right].$$

so sind in diesem Falle ihre Fourierkoeffizienten

$$a_{n0} = \sqrt{2\pi}\,(c - \lambda_a), \quad a_{n1} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{e^{nL} + e^{-nL}}{e^{n\lambda_a}} \cos n\vartheta_a$$

$$a_{n2} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{e^{nL} - e^{-nL}}{e^{n\lambda_a}} \sin n\vartheta_a.$$

Bilden wir nun mit diesen Größen die Picardsche Reihe, so sehen wir leicht, indem wir wie früher verfahren, daß sie im einen Falle für $\lambda < \lambda_a$ konvergiert, im andern dagegen, wenn der Ausdruck

$$e^{2n\,2L - \lambda_a - \lambda}$$

(der Wert des Quotienten zweier auf einander folgender Glieder für großes n) kleiner als Eins ist, d. h. für $\lambda > 2L - \lambda_a$. Es ist nun zu unterscheiden ob λ_a größer oder kleiner als $2L$ ist. Im ersten Fall können wir, da ja die λ stets positiv sind, die Belegungsellipsen beliebig nahe an die Brennlinie (d. h. $\lambda = 0$) heranrücken lassen. Im letzteren aber ist die untere Grenze $2L - \lambda_a$. Wir erhalten demnach den Satz:

> Ist a ein zwischen den beiden Ellipsen (L) und $(2L)$ gelegener Punkt, so hat die Gleichung
>
> $$\log \frac{1}{E_{as}} = \int_0^{2\pi} \eta(\alpha) \log \frac{1}{E_{os}}\, d\alpha$$
>
> eine Lösung für alle die Ellipsen (λ), welche durch
>
> $$2L - \lambda_a < \lambda < \lambda_a$$
>
> bestimmt sind. Liegt dagegen a auch noch außerhalb der Ellipse $(2L)$, so können wir die Belegungsellipse beliebig zwischen a und der Brennlinie variieren.

Während beim Kreise die inneren und äußeren Punkte eine durchaus gleichwertige Rolle spielten, tritt also hier bei der Ellipse eine Ungleichförmigkeit zu Tage: denn die äußeren Punkte zerfallen ihrerseits wieder in zwei Klassen, die durch die Ellipse

$(2L)$ von einander geschieden werden. Wir können unser Resultat so interpretieren: Wenn der Punkt a nur weit genug außerhalb (L) liegt, so kann man sein Potential auf der Grundellipse ersetzen durch das einer passend belegten, im übrigen aber beliebigen Ellipse des Innengebietes. Dies überrascht insofern, als man nach dem Analogon des Kreises erwarten sollte, daß jedem äußern Punkte eine bestimmte von Null verschiedene untere Grenze für λ entspricht.

Wir wollen den Fall, daß a zwischen (L) und $(2L)$ liegt, noch etwas näher betrachten. Durch ganz ähnliche Überlegungen, wie wir sie schon oben durchführten (namentlich S. 29f.), werden wir auf die modifizierte Gleichung

$$\log \frac{1}{E_{as}} - \log \frac{1}{E_{a's}} = \int_0^{2\pi} \eta'(\alpha) \log \frac{1}{E_{s\alpha}} d\alpha$$

geführt, wo a' bestimmt ist durch

$$\lambda_{a'} = 2L - \lambda_a \quad \text{und} \quad \vartheta_{a'} = \vartheta_a.$$

Wir wollen nun die Grenzen für die Lösbarkeit dieser Gleichung bestimmen. Berücksichtigen wir, daß a' ein innerer Punkt ist, also etwa vergleichbar mit i, und daß a der zugehörige erste Spiegelpunkt[1]) ist, vergleichbar dem i_0', so erkennen wir, daß die obige Gleichung abgesehen vom Vorzeichen dieselbe ist wie Gleichung (34) S. 29). Für diese aber haben wir die obere Grenze des Lösbarkeitsbereiches bereits festgestellt; sie ist in unserer jetzigen Bezeichnungsweise $2L + \lambda_a$. Es handelt sich also nur noch um die untere Grenze, die dann auch zugleich die der Gleichung (34) ist. Wir betrachten zu diesem Zwecke Werte $\lambda < L$. Dann sind die Eigenwerte des Kernes, wie schon S. 53 angegeben,

$$k_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c - L}\,, \quad k_{n_1} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\,, \quad k_{n_2} = \frac{n}{\pi} \frac{e^{nL}}{e^{n\lambda} - e^{-n\lambda}}\,.$$

Benutzen wir für die einzelnen Bestandteile der Funktion auf der linken Seite die bekannten Reihendarstellungen, so erhalten wir nach der mehrfach angewandten Methode für die Fourierkoeffizienten

1) Vgl. S. 24.

$$a_0 = \sqrt{2\pi}(\lambda_a - L),\ a_{n1} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\left[\frac{e^{n(2L-\lambda a)} + e^{-n(2L-\lambda a)}}{e^{nL}} - \frac{e^{nL} + e^{-nL}}{e^{n\lambda a}}\right]\cos n\vartheta_a$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{n}\left[e^{-n(L+\lambda a)}\left(e^{2n(\lambda a - L)} - 1\right)\right]\cos n\vartheta_a$$

$$a_{n2} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\left[\frac{e^{n(2L-\lambda a)} - e^{-n(2L-\lambda a)}}{e^{nL}} - \frac{e^{nL} - e^{-nL}}{e^{n\lambda a}}\right]\sin n\vartheta_a$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{n}\left[e^{-n(L+\lambda a)}\left(1 - e^{2n(\lambda a - L)}\right)\right]\sin n\vartheta_a.$$

Die Picardsche Reihe ist demnach

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_a - L}{c - L}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-n\lambda a}\left(e^{2n(\lambda a - L)} - 1\right)}{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\cos^2 n\vartheta_a + \frac{e^{-n\lambda a}\left(1 - e^{2n(\lambda a - L)}\right)}{e^{n\lambda} - e^{-n\lambda}}\sin^2 n\vartheta_a\right].$$

Für sehr großes n können wir die Glieder wieder wie früher abschätzen. Dann sieht man, daß sich die Elemente der Reihe immer mehr den Werten

$$\left(\frac{e^{n(\lambda a - 2L)}}{e^{n\lambda}}\right)^2 = e^{2n(\lambda a - 2L - \lambda)}$$

nähern. Daraus folgt unmittelbar, daß die Picardsche Reihe konvergiert, sobald $\lambda_a - 2L - \lambda < 0$ ist; das ist aber für jedes λ erfüllt, da $\lambda_a < 2L$ sein sollte. Wir erhalten so den Satz:

Für $\lambda_a < 2L$ hat die modifizierte Integralgleichung

$$\log\frac{1}{E_{as}} - \log\frac{1}{E_{a's}} = \int_0^{2\pi}\eta'(\alpha)\log\frac{1}{E_{os}}\,d\alpha,$$

welche gleichbedeutend ist mit der Gleichung (34) S. 29) für alle die Parameterwerte, welche der Bedingung

$$0 < \lambda < 2L + \lambda_a = 4L - \lambda_a$$

genügen.

Unsere Resultate können wir geometrisch etwa in folgender Weise veranschaulichen: Ist ein Punkt a gegeben, der außerhalb der Grundellipse (L) und auch noch außerhalb der Ellipse $(2L)$ liegt, so kann man jede konfokale innerhalb (L) gelegene Ellipse so mit Masse belegen, daß ihr Potential auf der Grundellipse (L) übereinstimmt mit dem Potential $\log\frac{1}{E_{as}}$ einer in a gedachten Masse 1. (Erster Fall der Figur.)

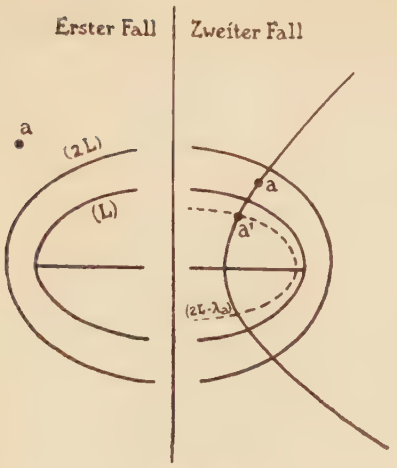

Fig. 3.

Liegt dagegen der Punkt $a(\lambda_a, \vartheta_a)$ zwischen der Grundellipse (L) und jener größeren $(2L)$, so ist eine derartige Belegung nur möglich bei denjenigen inneren Ellipsen, deren Parameter größer als $2L - \lambda_a$ ist. Doch kann man auch jede kleinere Ellipse so mit Masse belegen, daß ihr Potential zusammen mit demjenigen des Punktes $a'(2L - \lambda_a, \vartheta_a)$, in ihm die Masse 1 konzentriert gedacht, auf der Grundellipse (L) jenen Wert $\log \frac{1}{E_{as}}$ besitzt. (Zweiter Fall der Figur.)

2. Über die Greensche Funktion beim abgeplatteten Rotationsellipsoid.

Jedes abgeplattete Rotationsellipsoid ist in Polarkoordinaten gegeben durch

(1) $x = A\cos\vartheta; \quad y = B\sin\vartheta\cos\varphi; \quad z = B\sin\vartheta\sin\varphi,$

wobei $A < B$ ist. Wenn wir die beiden Größen a und ϱ durch

$$a = \sqrt{A^2 - B^2} \quad \text{und} \quad a\varrho = A$$

einführen, so gehen die Gleichungen (1) über in

(1′) $x = a\varrho\cos\vartheta; \; y = a\sqrt{\varrho^2 - 1}\sin\vartheta\cos\varphi; \; z = a\sqrt{\varrho^2 - 1}\sin\vartheta\sin\varphi.$

Hierbei ist zu beachten, daß a und also auch ϱ rein imaginäre Größen sind. Wir können daher

$$\varrho = i\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}$$

setzen; dann ist

$$\sqrt{\varrho^2-1} = i\,\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}.$$

Schließlich führen wir noch die Größen

$$(2) \qquad \xi = \varrho - \sqrt{\varrho^2-1} = -ie^{-\lambda} \quad \text{und} \quad \psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\lambda}}}$$

ein. Auf dem Ellipsoid ist (bei gegebenem a) ϱ und daher auch λ konstant. Andrerseits entspricht jedem ϱ und also jedem λ ein bestimmtes Ellipsoid. Alle diese Ellipsoide λ = const. sind konfokal, und man erhält, wie man zeigen kann, alle Individuen der Schar schon dann, wenn λ nur die positiven Werte durchläuft.

Bei unserm Problem gehen wir aus von dem Grundellipsoid (L), in dessen Innern ein Punkt i gegeben sei. Dann suchen wir ein größeres, konfokales Ellipsoid (λ) so mit einer Flächendichtigkeit zu belegen, daß ihr Newtonsches Potential auf dem Grundellipsoid allenthalben den Wert $\frac{1}{E_{is}}$ annimmt.

Wir gelangen so zu der folgenden Integralgleichung

$$(3) \qquad \frac{1}{E_{is}} = \int_{(\lambda)} \eta_\sigma \frac{1}{E_{o\sigma}}\, d\sigma.$$

Dabei bezeichnet wieder s einen Punkt auf (L), σ dagegen einen Punkt auf dem größeren Ellipsoid (λ). Wir machen im Folgenden die vereinfachende [1]) Annahme, daß der Punkt i auf der Rotationsachse liegt. Dann gilt für die reziproke Entfernung die folgende Entwicklung nach Kugelfunktionen [2]):

$$(4) \quad \frac{a}{E_{os}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \varepsilon_j \frac{2n+1}{2} \left[\frac{(n-j)!}{(n+j)!}\right]^2 P_{nj}(\varrho_L) Q_{nj}(\varrho_\lambda) P_{nj}(\mu_s) P_{nj}(\mu_o) \cos j(\varphi_s - \varphi_\sigma)$$

und

$$(4') \qquad \frac{a}{E_{is}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\varrho_{\lambda i})\, Q_n(\varrho_L)\, P_n(\mu_s).$$

Dabei ist

$$\varepsilon_0 = 2,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 1;\ \mu_s = \cos\vartheta_s \text{ und } \varrho_\lambda = i\,\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}.$$

Aus der ersten Entwicklung sehen wir unmittelbar, wenn wir noch für $\cos j(\varphi_s - \varphi_o)$ geschrieben denken:

1) Diese Annahme ist, wie eine genauere Rechnung lehrt, nicht einschränkend.

2) Vgl. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials, S. 341.

$$\cos j\varphi_s \cos j\varphi_\sigma + \sin j\varphi_s \sin j\varphi_\sigma,$$

daß

$$P_{nj}(\mu)\cos j\varphi \quad \text{und} \quad P_{nj}(\mu)\sin j\varphi$$

die Eigenfunktionen unseres Kernes sind. Um sie zu normieren, benutzen wir die Relation

$$\int_{(1)}\int P_{nj}^2(\mu)\cos^2 j\varphi\, d\omega = \frac{2\pi}{2n+1}\,\frac{(n+j)!}{(n-j)!},$$

das Integral über die Einheitskugel hinerstreckt. Setzen wir nun

$$\bar{P}_{nj}(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}\sqrt{\frac{(n-j)!}{(n+j)!}}\,P_{nj}(\mu),$$

so sind

(5) $$\psi_{nj}^{(1)}(\mu,\varphi) = \bar{P}_{nj}(\mu)\cos j\varphi \quad \text{und} \quad \psi_{nj}^{(2)}(\mu,\varphi) = \bar{P}_{nj}(\mu)\sin j\varphi$$

die normierten Eigenfunktionen, und die zugehörigen Eigenwerte sind

(6) $$k_{nj} = (-1)^j \frac{1}{\varepsilon_j \pi}\,\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\,\frac{1}{P_{nj}(\varrho_L)\,Q_{nj}(\varrho_\lambda)}.$$

Um den Lösungsbereich der Integralgleichung (3) zu ermitteln, wollen wir wieder das Picardsche Kriterium anwenden; dazu gebrauchen wir aber noch die Fourierkoeffizienten $a_{nj}^{(1)}$ und $a_{nj}^{(2)}$ der Funktion $\frac{1}{E_{is}}$ in Bezug auf das System der $\psi_{nj}^{(1)}$ und $\psi_{nj}^{(2)}$. Zufolge unserer Annahme über die Lage des Punktes i verschwinden diese aber sämtlich außer

$$a_{n0}^{(1)} = a_n = 2\pi\, P_n(\varrho_{\lambda i})\, Q_n(\varrho_L).$$

Mithin wird die Picardsche Reihe

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2\, a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_n(\varrho_{\lambda i})\,Q_n(\varrho_L)}{P_n(\varrho_\lambda)\,Q_n(\varrho_L)}\right)^2.$$

Da die Argumente der hier auftretenden Kugelfunktionen die Bedingung

$$|\varrho - \sqrt{\varrho^2-1}| = |\xi| < 1$$

erfüllen, so können wir, um die Konvergenzgrenze der Reihe (7) zu bestimmen, die Näherungsformeln [1]):

(8) $$\begin{cases} P_n(\varrho_\lambda) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\varphi(\lambda)\,(-i)^{-n}\,e^{n\lambda} \\ Q_n(\varrho_\lambda) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\,\psi(\lambda)\,(-i)^{n+1}\,e^{-(n+1)\lambda} \end{cases}$$

1) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I, S. 174.

benutzen; $\psi(\lambda)$ hat die Bedeutung (2). Dann nimmt das allgemeine Glied v_n der Reihe (7) die Gestalt an

$$v_n \sim \left(\frac{\psi(\lambda_i)}{\psi(\lambda)}\right)^2 \left(\frac{e^{n\lambda_i}\, e^{(n+1)\lambda}}{e^{nL}\, e^{(n+1)L}}\right)^2.$$

Also ist

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \left(\frac{e^{\lambda_i}\, e^{\lambda}}{e^{2L}}\right)^2$$

und die Reihe (7) konvergiert (für $\lambda > L$) dann und nur dann, wenn $\lambda < 2L - \lambda_i$ ist. Ganz analog läßt sich zeigen, daß der Parameter noch der weiteren Bedingung $\lambda > \lambda_i$ genügen muß, wenn wir auch Werte $\lambda < L$ betrachten. Diese Grenzen stimmen demnach genau mit den bei der Ellipse gefundenen überein.

Man wird nun vermuten, daß nach Abspaltung eines gewissen Potentials, analog wie bei der Ellipse, das Belegungsellipsoid noch weiter hinausgeschoben werden kann. Wir wollen zunächst zeigen, daß dies bei Abspaltung eines Punktpotentials nicht der Fall ist. Es handelt sich dann also um die modifizierte Gleichung

$$\frac{1}{E_{is}} - \frac{m}{E_{i's}} = \int_{(\lambda)} \eta_\sigma \frac{1}{E_{\sigma s}}\, d\sigma, \tag{9}$$

wo der Punkt i' auf derselben Seite der Rotationsachse liegen soll wie i, aber auf dem Ellipsoid $(2L - \lambda_i)$. Es gilt dann die Entwicklung

$$\frac{ma}{E_{i's}} = m \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\varrho_L)\, Q_n(\varrho_{2L-\lambda_i})\, P_n(\mu_s),$$

und an die Stelle des früheren a_n tritt jetzt

$$a_n' = 2\pi \left[P_n(\varrho_{\lambda_i})\, Q_n(\varrho_L) - m\, P_n(\varrho_L)\, Q_n(\varrho_{2L-\lambda_i})\right].$$

Demnach wird in diesem Falle die Picardsche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2\, a_n'^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n(\varrho_{\lambda_i})\, Q_n(\varrho_L) - m\, P_n(\varrho_L)\, Q_n(\varrho_{2L-\lambda_i})}{P_n(\varrho_L)\, Q_n(\varrho_\lambda)}\right)^2. \tag{10}$$

Hier benutzen wir nun Formeln, welche das Verhalten von P_n und Q_n bei wachsendem n genauer angeben als (8), nämlich[1]):

$$\left.\begin{aligned} P_n(\varrho_\lambda) &\sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\, \psi(\lambda)(-i)^{-n}\, e^{n\lambda}\left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4(1+e^{-2L})}\right)\right] \\ Q_n(\varrho_\lambda) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \psi(\lambda)\, (-i)^{n+1}\, e^{-(n+1)\lambda}\left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4(1+e^{-2L})}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

1) Vgl. Heine a. a. O. S. 178, 182.

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir für das allgemeine Glied der Reihe (10)

$$v_n \sim \frac{1}{\psi(\lambda)\, e^{nL}\, e^{-(n+1)\lambda}} \left\{ \psi(\lambda_i)\, e^{n\lambda_i}\, e^{-(n+1)L} \left[1 - \frac{1}{n}\, p(\lambda_i)\right]\left[1 - \frac{1}{n}\, q(L)\right] \right.$$
$$\left. - m\psi(2L - \lambda_i)\, e^{nL}\, e^{-(n+1)(2L-\lambda_i)} \left[1 - \frac{1}{n}\, p(L)\right]\left[1 - \frac{1}{n}\, q(2L - \lambda_i)\right] \right\}.$$

Führen wir die Multiplikation aus, so erhalten wir für v_n die Näherungsformel

$$v_n \sim \frac{1}{\psi(\lambda)} \frac{e^{n\lambda_i}\, e^{(n+1)\lambda}}{e^{(2n+1)L}} \left[\psi(\lambda_i) - m\psi(2L - \lambda_i)\, e^{-L} e^{\lambda_i} + \frac{1}{n} f\right].$$

Hier können wir nun zwar leicht durch passende Wahl von m das erste Glied in der Klammer zum Verschwinden bringen; dann aber ist, wie man leicht sieht, der von L und λ_i abhängige Faktor f von Null verschieden, und es bleibt noch eine Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$v_n' \sim \frac{1}{\psi(\lambda)} \frac{e^{n\lambda_i}\, e^{(n+1)\lambda}}{n\, e^{(2n+1)L}} f$$

und diese konvergiert auch wieder nur für $\lambda < 2L - \lambda_i$.

Analogien mit der Kugel[1]) legen die Vermutung nahe, daß man vielleicht im Raume nicht die Potentiale materieller Punkte, sondern von materiellen Linien zur Darstellung der Greenschen Funktion wird heranziehen müssen, in unserm Falle spezieller, daß wir die Möglichkeit, das Belegungsellipsoid weiter zu vergrößern, erhalten, wenn wir das Potential einer von i' ausgehenden, passend mit Masse belegten Linie absondern, welche sich orthogonal zu den Ellipsoiden in den Außenraum erstreckt. Es würde sich dann um die Gleichung

$$\frac{1}{E_{is}} - \int_{2L-\lambda_i}^{\lambda} \frac{\eta_\varkappa}{E_{\varkappa s}}\, d\varkappa = \int_{(\lambda)} \eta_\sigma \frac{1}{E_{\sigma s}}\, d\sigma \tag{11}$$

handeln, wo $\varkappa$ einen Punkt auf dieser Linie bedeutet. Für $\frac{1}{E_{\varkappa s}}$ gilt die Entwicklung

$$\frac{a}{E_{\varkappa s}} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}_n(\varrho_L)\, Q_n(\varrho_\varkappa)\, \overline{P}_n(\mu_s).$$

Es ist also dann der Fourierkoeffizient der linken Seite

1) Vgl. E. R. Neumann, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1907.

$$2\pi\left[P_n(\varrho_{\lambda_i})\,Q_n(\varrho_L) - P_n(\varrho_L)\int_{2L-\lambda_i}^{\lambda} \bar{\eta}_x\,Q_n(\varrho_x)\,dx\right]$$

und mithin die Picardsche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{P_n(\varrho_{\lambda_i})\,Q_n(\varrho_L)}{P_n(\varrho_L)\,Q_n(\varrho_{\lambda})} - \frac{\int_{2L-\lambda_i}^{\lambda} \bar{\eta}_x\,Q_n(\varrho_x)\,dx}{Q_n(\varrho_{\lambda})}\right\}^2.$$

Es sei nun

$$\left|\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\psi(x)\,\bar{\eta}_x\right| \leqq M,$$

wo M eine gewisse endliche Zahl bedeutet. Dann ist nach (8)

$$\left|\int_{2L-\lambda_i}^{\lambda} \bar{\eta}_x\,Q_n(\varrho_x)\,dx\right| \leqq M\int_{2L-\lambda_i}^{\lambda} e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{M}{n+1}\left(e^{-(n+1)(2L-\lambda_i)} - e^{-(n+1)\lambda}\right),$$

also ist das Integral von der Größenordnung $\frac{1}{n}$. Wir haben aber schon S. 60 gesehen, daß in der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{P_n(\varrho_{\lambda_i})\,Q_n(\varrho_L)}{P_n(\varrho_L)\,Q_n(\varrho_{\lambda})}\right\}^2$$

bereits der erste, keine Potenz von $\frac{1}{n}$ enthaltende Teil für $\lambda > 2L - \lambda_i$ divergiert.

Nun haben wir aber gesehen, daß wir beim Abspalten des Punktpotentials durch passende Wahl von m diesen ersten Bestandteil zum Verschwinden bringen können. Ferner können wir (worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen) durch partielle Integration die Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\cdots$ berechnen, und so ist es jedenfalls nicht ausgeschlossen (eine gewisse Wahrscheinlichkeit spricht sogar dafür), daß wir mit der gleichzeitigen Absonderung eines Punkt- und eines Linienpotentials weiter kommen werden. Solche Gebilde, Linien, welche mit Masse belegt sind und an dem einen Endpunkt einen wirklichen Massenpunkt besitzen, hat auch E. R. Neumann bei den Polarpotentialen der Kugel gefunden (vgl. Rendiconti a. a. O.). Fassen wir die Ergebnisse noch einmal zusammen, so können wir sagen:

> Behandeln wir beim abgeplatteten Rotationsellipsoid dasselbe Problem wie oben beim Kreise und bei der Ellipse, suchen wir also ein Ellipsoid (λ) so mit Masse zu belegen, daß sein Newtonsches Potential allenthalben auf dem

Grundellipsoid (L) den Wert $\frac{1}{E_{is}}$ annimmt, so werden wir auf die folgende Integralgleichung erster Art geführt:

$$\frac{1}{E_{is}} = \int_{(\lambda)} \eta_\sigma \frac{1}{E_{\sigma s}} d\sigma.$$

Dieselbe ist lösbar für $\lambda_i < \lambda < 2L - \lambda_i$. Als Belegungsellipsoide sind also alle die brauchbar, welche zwischen i und seinem Spiegelpunkte $i'(2L - \lambda_i, \vartheta_i, \varphi_i)$ liegen, also genau wie bei der Ellipse.

Versuchen wir aber durch Abspaltung des Potentials einer in i' konzentrierten Masse oder durch Abspaltung des Potentials einer Linie, welche von i' ausgehend orthogonal zu allen Ellipsoiden verläuft, den Lösungsbereich der obigen Gleichung zu erweitern, so führt dies zu keinem Resultate. Offen geblieben ist noch die Frage, ob wir nicht weiterkommen, wenn wir diese beiden Arten der Abspaltung kombinieren.

Lebenslauf.

Als Sohn des Rentners Dr. Diddo Wiarda und seiner Gemahlin Luise geborene Allner wurde ich, Georg Jakob Wiarda, am 12. IV. 1889 zu Magdeburg geboren; ich bin evangelisch und preußischer Staatsangehöriger. Von 1896—1900 besuchte ich die Bürgerschule, dann $2^1/_4$ Jahre das Kloster „Unser Lieben Frauen“ (Gymnasium). 1903 zogen meine Eltern nach Elberfeld, wo ich weiter das Gymnasium besuchte und Ostern 1909 das Abiturientenexamen bestand. Ich wandte mich dem Studium der Mathematik und Physik zu und war in den beiden ersten Semestern in Berlin. Dann studierte ich sieben Semester in Marburg, wo ich mich außer mit den genannten Fächern noch mit Philosophie beschäftigte. Die Dozenten, deren Vorlesungen ich hörte, sind

in Berlin: Förster, Frobenius, Grüneisen, Knoblauch, Lasson, Lehmann-Filhés, Rubens, Scheiner †, H. A. Schwarz;

in Marburg: Cohen, Feußner, Hartmann, Hellinger, Hensel, Natorp, E. R. Neumann, Richarz, F. A. Schulze, Take, Zincke.

All den genannten Herren bin ich zu größtem Dank verpflichtet, vor allem aber meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. E. R. Neumann für die Anregung und hilfreiche Unterstützung der vorliegenden Arbeit. Bei Herrn Prof. Feußner war ich von Herbst 1912 bis Ostern 1914 Assistent im theoretisch-physikalischen Seminar. Das Rigorosum bestand ich am 17. Dezember 1913. Seit Ostern 1914 bin ich in Göttingen.